POLYBOX

Schnellübung 9

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 9

POLYBOX

WH: Linienverteilte Kräfte und Kräftemittelpunkt

Im Allgemeinen lässt sich eine (parallele, gleichgerichtete) linienverteilte Kraft auf eine Resultierende mit Betrag R reduzieren.

$$R = \int_0^L q(x)dx$$

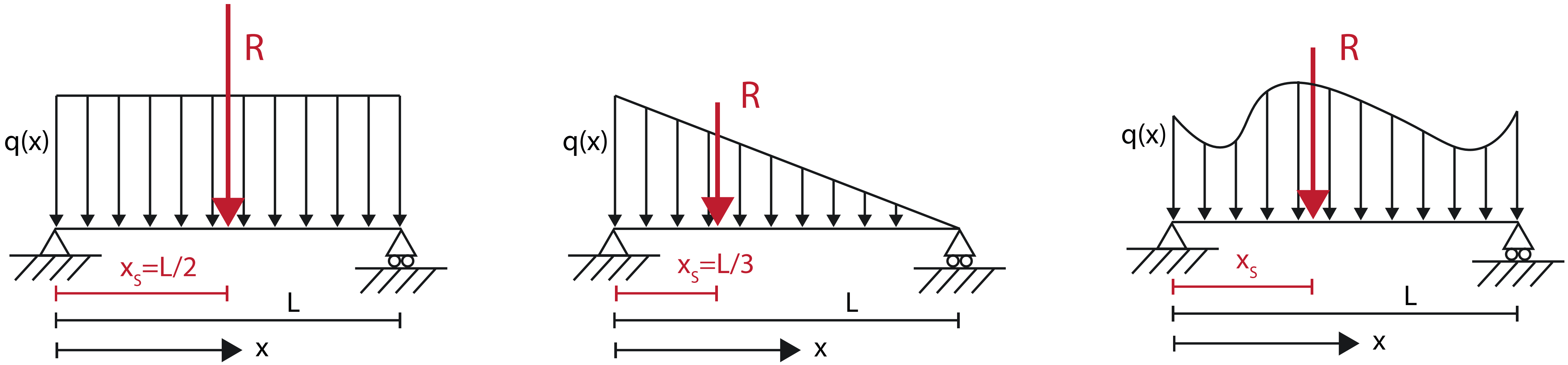
Die Resultierende greift im Kräftemittelpunkt x_s an.

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{\int_0^L q(x)dx} = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{R}$$

Einführung Schnellübung 9

WH: Linienverteilte Kräfte und Kräftemittelpunkt

Resultierende $\underline{R}$ und Kräftemittelpunkt x_s



Einführung Schnellübung 9

POLYBOX

WH: Gleichgewicht

Eine Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn sie keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment aufweist:

2D

$$\sum F_x = \sum F_y = 0$$

$$\sum M_{Az} = 0$$

bei x-y-Koordinatensystem

3D

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

$$\sum M_{Ax} = \sum M_{Ay} = \sum M_{Az} = 0$$

bei x-y-z-Koordinatensystem

für jeden beliebigen Punkt A

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 9

POLYBOX

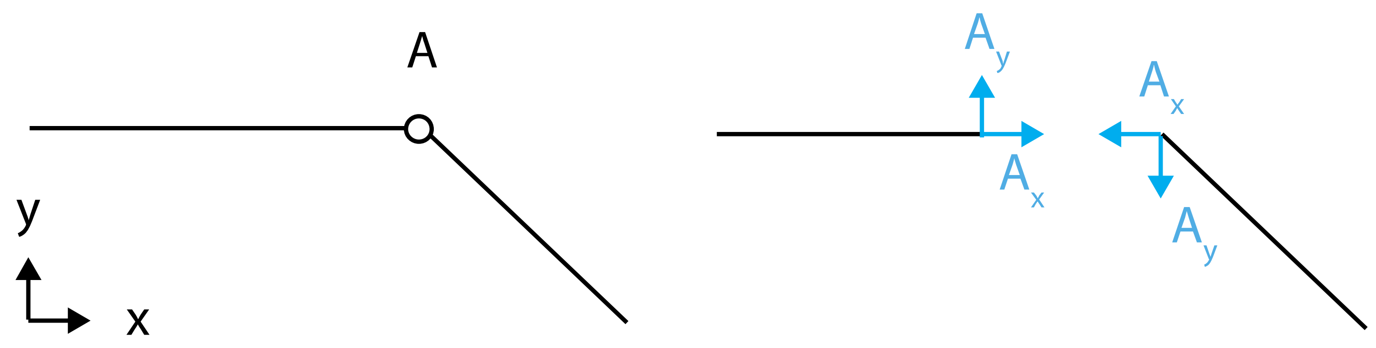
Systemtrennung

An Systemen aus mehreren Körpern, wenn mehr Unbekannte als Gleichungen: Systemtrennung

Die Körper können dann getrennt voneinander betrachtet werden.

Bindungskräfte am Trennungspunkt so einführen, dass sie sich gegenseitig wieder aufheben, wenn man das System zusammenführt.

Actio ↔ Reactio



Systemtrennung ist nur in Punkten der Stäbe sinnvoll, die durch ein Gelenk verbunden sind.

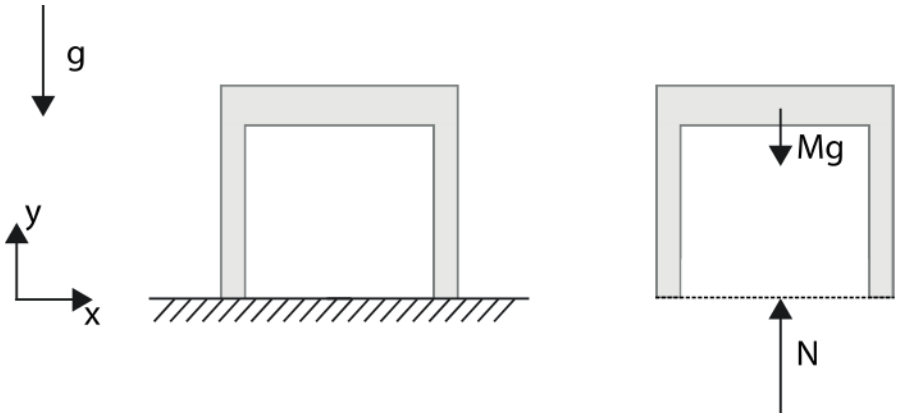
!! Nicht an Verschweissungen !!

Einführung Schnellübung 9

Standfestigkeit

Steht ein Körper auf einer Unterlage, so erfährt dieser an der Berührungsfläche i. A. eine resultierende Normalkraft $\underline{N}$.

Der Angriffspunkt der resultierenden Normalkraft ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen.
(Bei einer reibungsbehafteten Unterlage wirkt zusätzlich eine Reibungskraft $\underline{F}_R$, siehe später)



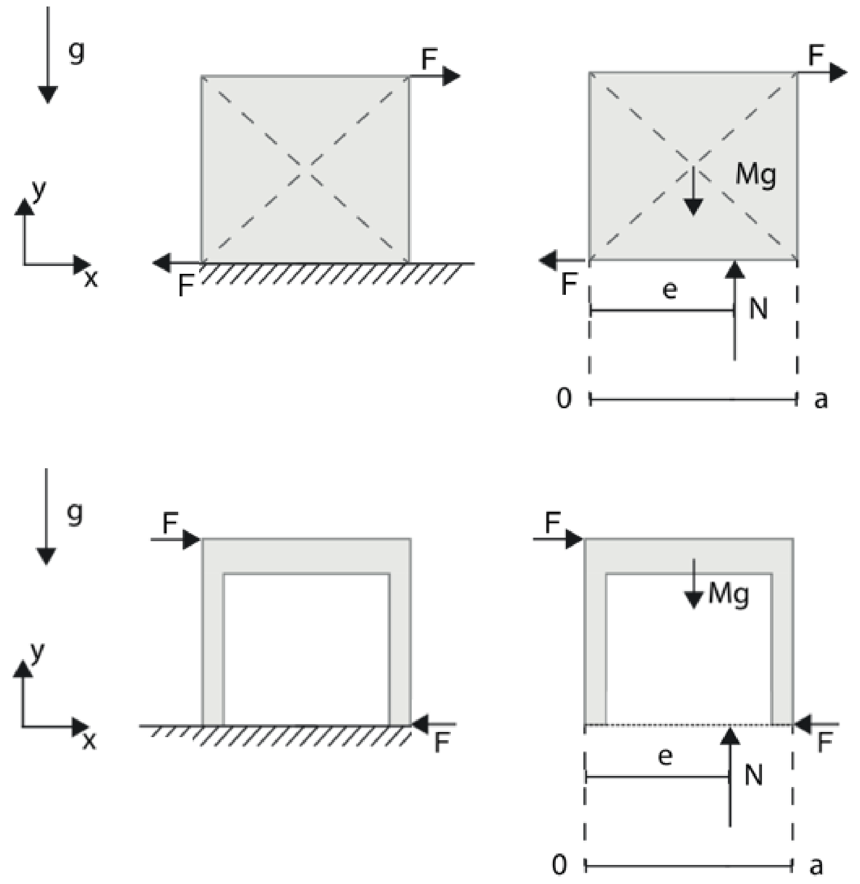
Einführung Schnellübung 9

POLYBOX

Standfestigkeit

Kein Kippen des Körpers (Bedingungen für Standfestigkeit):

- Normalkraft greift in der Standfläche an: $0 < e < a$



Standfläche: Kleinste konvexe Fläche, die die Berührungsfläche einschliesst

Tipps Schnellübung 9

POLYBOX

Aufgabe 1

a) Dreieck ABC ist gleichschenklig

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

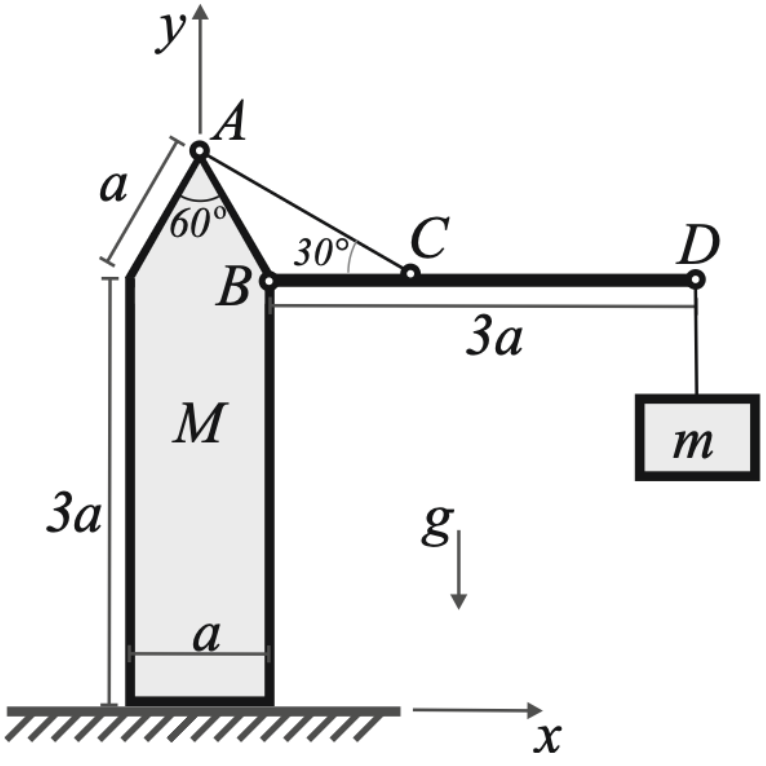
Schnellübung 9

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Kran, bestehend aus einem homogenen Hauptkörper mit Masse M, einem gewichtslosen Ausleger (Stab BD mit Länge $3a$, in B gelenkig und reibungsfrei mit dem Körper verbunden) und einem masselosen Seil AC.
Der Kran steht reibungsfrei auf dem Untergrund.
An dem Ausleger hängt im Punkt D eine Kiste mit Masse m.

a) Ermitteln Sie die Seilkraft im Seil AC.

b) Wie gross darf m bei gegebenem M maximal sein, damit der Kran nicht kippt?



POLYBOX

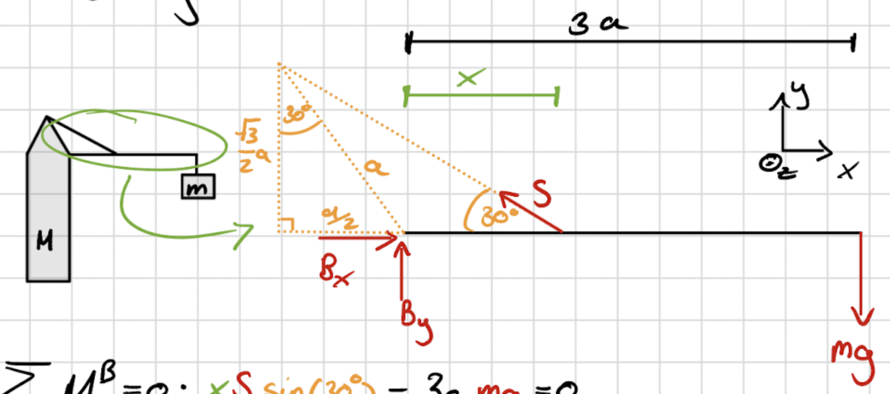
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. a)

1. Tragarm vom Kran abtrennen
2. Lagerkräfte in B einführen
3. Mometen-GGB in B aufstellen
4. Für S Lösen
5. x anhand der Geometrie finden

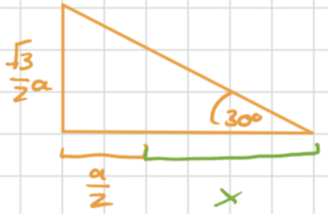
Schnellübung 9

1. a)



$$\sum M_z^B = 0: \; x\,S\sin(30^\circ) - 3a\,mg = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{3a\,mg}{x\,1/2} = \frac{6a\,mg}{x}$$



$$\tan(30^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a/2 + x}$$

$$x + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2\tan(30^\circ)}$$

$$x = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan(30^\circ)} - 1\right) = \frac{a}{2}(3-1) = a$$

$$x = a$$

$$\underline{\underline{S = 6mg}}$$

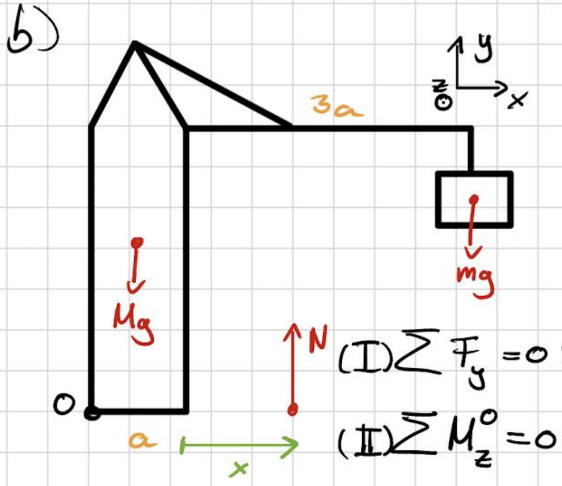
POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. b)

1. Normalkraft N mit Angriffspunkt abhängig von x einführen
2. Kräfte GGB in y-Richtung aufstellen
3. Momenten GGB im Punkt O aufstellen
4. Standfestigkeitsbedingung aufstellen
5. x mit I und II bestimmen und in III einsetzen
6. III auflösen

b)



$$(\mathrm{I})\ \sum F_y = 0:\ N = (M+m)g$$

$$(\mathrm{II})\ \sum M_z^O = 0:\ -Mg\frac{a}{2} + (a+x)N - mg\,4a$$

Kran ist Standfest → N muss durch Standfläche vom Kran wirken

$$\rightarrow \underbrace{-a \leq}\, x \leq 0$$

können wir ignorieren da Kran nie nach hinten kippen wird

$$\rightarrow x \leq 0 \quad (\mathrm{III})$$

$$(\mathrm{II}):\ (a+x)N = ga\left(\frac{M}{2}+4m\right)$$

$$x = \frac{ga\left(\frac{M}{2}+4m\right)}{\underset{(\mathrm{I})\rightarrow}{g(M+m)}} - a \overset{(\mathrm{III})}{\leq} 0$$

$$\frac{a\left(\frac{M}{2}+4m\right)}{(M+m)} \leq a$$

$$\frac{M}{2} + 4m \leq M + m$$

$$3m \leq \frac{M}{2}$$

$$\underline{\underline{m \leq \frac{M}{6}}}$$

Tipps Schnellübung 9

POLYBOX

Aufgabe 2

Systemabgrenzung, 3D Bindungskräfte beachten

In B: Kurzes Querlager

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

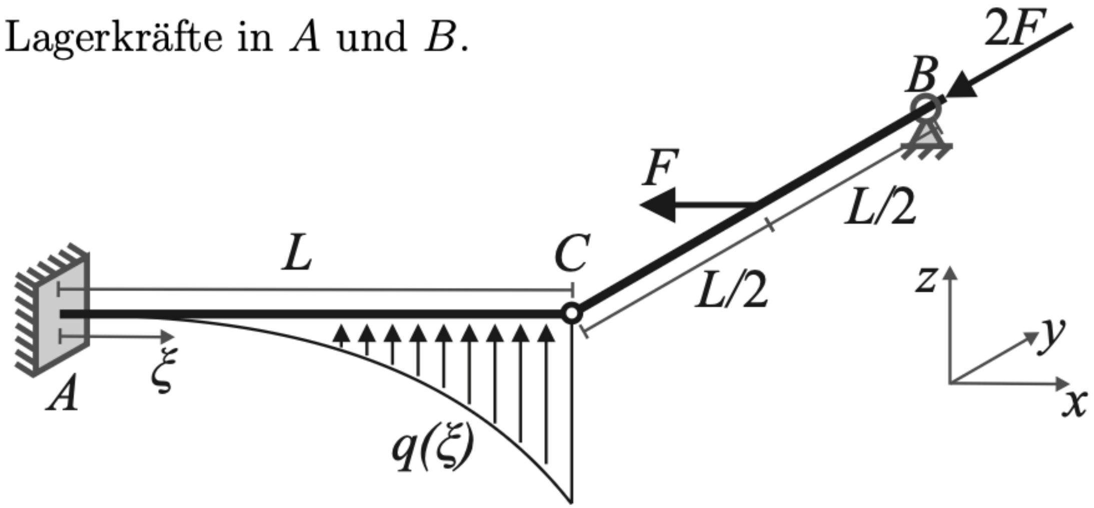
Schnellübung 9

POLYBOX

Aufgabe 2

Zwei masselose Stäbe (Länge L) sind in einem 90° Winkel gelenkig und reibungsfrei miteinander verbunden. Der erste Stab ist in A fest eingespannt und wird durch eine Linienkraft $\underline{q}(\xi) = F\frac{\xi^2}{L^3}\underline{e}_z$ belastet. Der zweite Stab wird in B durch ein kurzes Querlager abgestützt und am selben Punkt durch eine Kraft $\underline{F}_1 = -2F\underline{e}_y$ belastet. In der Mitte dieses Stabes greift dazu noch die Kraft $\underline{F}_2 = -F\underline{e}_x$ an.

Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B.



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. Resultierende und Angriffspunkt von $q(\xi)$ finden
2. System in C trennen und entgegengesetze Bindungskräfte einführen
3. 6 GGB pro Stab aufstellen (12 total)

2.

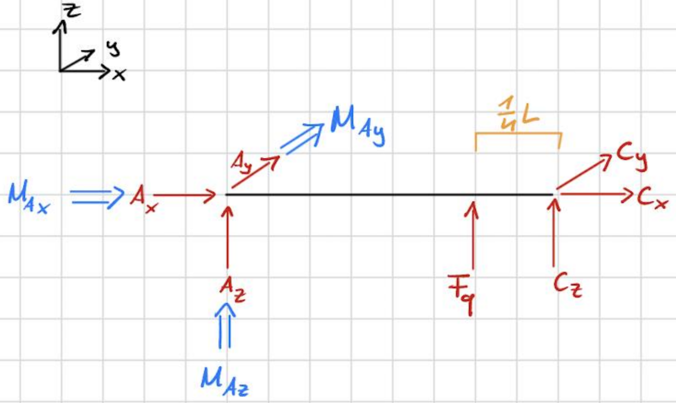
$$F_q = \int_0^L q(\xi)\,d\xi = \int_0^L F\left(\frac{\xi^2}{L^3}\underline{e}_z\right)d\xi = F\left[\frac{\xi^3}{3L^3}\underline{e}_z\right]_0^L = \frac{F}{3}\underline{e}_z$$

$$x_s = \frac{1}{F_q}\int_0^L \xi\, q(\xi)\,d\xi = \frac{3}{F}\int_0^L F\left(\frac{\xi^3}{L^3}\right)d\xi = 3\left[\frac{\xi^4}{4L^3}\right]_0^L = \frac{3}{4}L$$

8 Unbekannte und 6 GGB $\rightarrow$ nicht genug! ✗

$\rightarrow$ System im Punkt C trennen $\rightarrow$ 12 GGB ✓

Stab AC:



GGB:

I $\sum F_x = 0$: $A_x = -C_x$

II $\sum F_y = 0$: $A_y = -C_y$

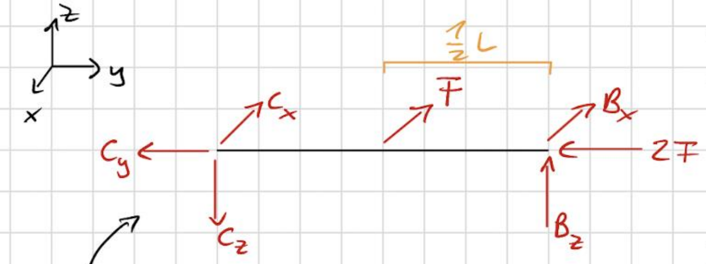
III $\sum F_z = 0$: $A_z = -C_z - F_q$

IV $\sum M_x^A = 0$: $M_{Ax} = 0$

V $\sum M_y^A = 0$: $M_{Ay} = C_z L + F_q \cdot \frac{3}{4}L$

VI $\sum M_z^A = 0$: $M_{Az} = -C_y L$

Stab BC:



In andere Richtung wie im Stab AC!

GGB:

VII $\sum F_x = 0$: $C_x = B_x - F$

VIII $\sum F_y = 0$: $C_y = -2F$

IX $\sum F_z = 0$: $C_z = B_z$

X $\sum M_x^A = 0$: $C_z = 0$

XI $\sum M_y^A = 0$: $0 = 0$

XII $\sum M_z^A = 0$: $C_x = -\frac{F}{2}$

POLYBOX

Lösung 2.

4. Gleichungssystem für Lagerkräfte lösen

$$\begin{aligned}
&\text{I} \quad \sum F_x = 0: \quad A_x = -C_x \\
&\text{II} \quad \sum F_y = 0: \quad A_y = -C_y \\
&\text{III} \quad \sum F_z = 0: \quad A_z = -C_z - F_q \\[6pt]
&\text{IV} \quad \sum M_x^A = 0: \quad M_{Ax} = 0 \\
&\text{V} \quad \sum M_y^A = 0: \quad M_{Ay} = C_z L + F_q \cdot \tfrac{3}{4} L \\
&\text{VI} \quad \sum M_z^A = 0: \quad M_{Az} = -C_y L \\[6pt]
&\text{VII} \quad \sum F_x = 0: \quad C_x = B_x - F \\
&\text{VIII} \quad \sum F_y = 0: \quad C_y = -2F \\
&\text{IX} \quad \sum F_z = 0: \quad C_z = B_z \\[6pt]
&\text{X} \quad \sum M_x^A = 0: \quad C_z = 0 \\
&\text{XI} \quad \sum M_y^A = 0: \quad 0 = 0 \\
&\text{XII} \quad \sum M_z^A = 0: \quad C_x = -\tfrac{F}{2}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I} + \text{XII}: \quad A_x = \frac{F}{2} \\
&\text{II} + \text{VIII}: \quad A_y = 2F \\
&\text{III} + \text{X}: \quad A_z = -F_q = -\frac{F}{3}
\end{aligned}\right\} \quad F_A = \begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ 2F \\ -\frac{F}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{IV}: \quad M_{Ax} = 0 \\
&\text{V} + \text{X}: \quad M_{Ay} = \frac{3}{4} L F_q = \frac{FL}{4} \\
&\text{II} + \text{VI}: \quad M_{Az} = 2FL
\end{aligned}\right\} \quad M_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{FL}{4} \\ 2FL \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{VII} + \text{XII}: \quad B_x = \frac{F}{2} \\
&\text{X} + \text{IX}: \quad B_z = 0
\end{aligned}\right\} \quad F_B = \begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 9

POLYBOX

Aufgabe 3
Link zu Integraltrainer im Moodle
(Rubrik „Informationen zum Mathematischen Repetitorium“)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

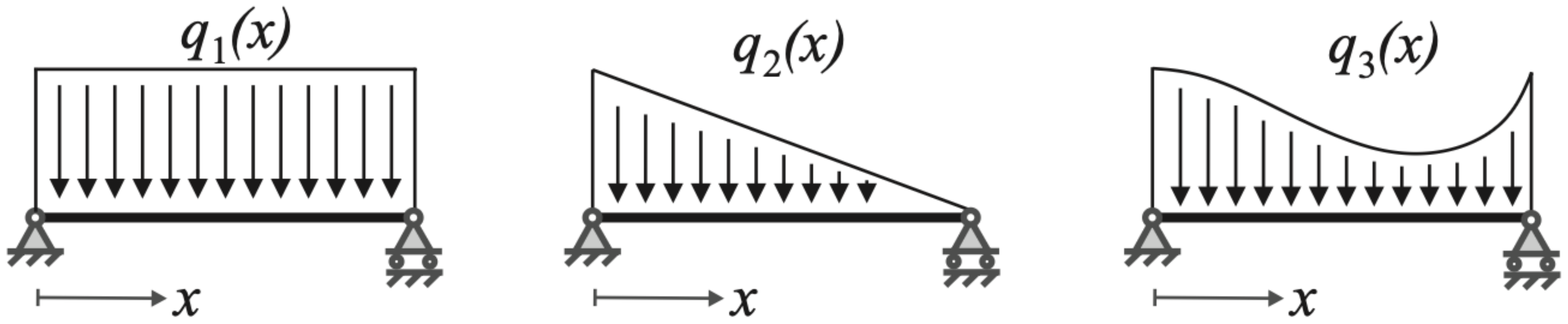
Schnellübung 9

POLYBOX

Aufgabe 3

Ermitteln Sie Betrag und Angriffspunkt der statisch äquivalenten Ersatzkraft für folgende Linienkräfte, die an einen Stab mit Länge L angreifen.

$$q_1(x) = \frac{F}{L} \qquad q_2(x) = F\left(\frac{1}{L} - \frac{x}{L^2}\right) \qquad q_3(x) = F\left(\frac{1}{L} - \frac{3x^2}{L^3} + \frac{3x^3}{L^4}\right)$$



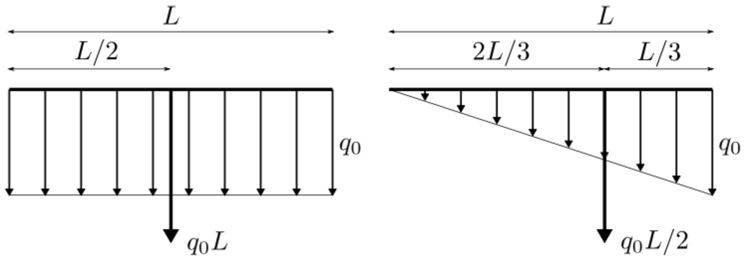
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. (1) und (2) mit ZF lösen
2. (3) Mit Formeln lösen

$$R = \int_0^L q(x)dx$$

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{\int_0^L q(x)dx} = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{R}$$



3.

(1) Aus ZF:

$$F_1 = q_1(0)\cdot L = F$$

$$x_s = \frac{1}{2}L$$

(2) Aus ZF:

$$F_2 = q_2(0)\cdot L \cdot \frac{1}{2} = \frac{F}{2}$$

$$x_s = \frac{1}{3}L$$

(3)

$$F_3 = F\int_0^L \left(\frac{1}{L} - \frac{3x^2}{L^3} + \frac{3x^3}{L^4}\right)dx = F\left[\frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} + \frac{3x^4}{4L^4}\right]_0^L$$

$$F_3 = F\left(1 - 1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}F$$

$$x_s = \frac{1}{F_3}\int_0^L x F\left(\frac{1}{L} - \frac{3x^2}{L^3} + \frac{3x^3}{L^4}\right)dx = \frac{4}{3}\int_0^L \left(\frac{x}{L} - \frac{3x^3}{L^3} + \frac{3x^4}{L^4}\right)dx$$

$$x_s = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2L} - \frac{3x^4}{4L^3} + \frac{3x^5}{5L^4}\right]_0^L = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)L$$

$$x_s = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{20}L = \frac{7}{15}L$$

Tipps Hausübung 9

POLYBOX

Aufgabe 1

a) Ruhelage, wenn Gleichgewichtsbedingungen (GGB) für jeden starren Körper erfüllt sind
b) Trennen des Gesamtsystems in Teilsysteme, N_1 und N_2 müssen innerhalb der jeweiligen Standfläche angreifen

Aufgabe 2

a) Linienverteilte Kraft reduzieren, Freischneiden und GGB
b) Bindung in A ist einseitig: Richtung der Bindungskraft?

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme