



Schnellübung 10

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

Einführung Schnellübung 10

Ideale Fachwerke

- Stäbe
 - Starr
 - Gewichtlos
- Knoten
 - An Stab-Enden
 - Reibungsfreie Gelenke
- Äussere Kräfte
 - Greifen nur an Knoten an



→ Bestehen aus Pendelstützen (Kräfte nur in Stabrichtung)

→ Oftmals Stabkräfte in ebenen Fachwerken gesucht („zur Dimensionierung“)

Einführung Schnellübung 10

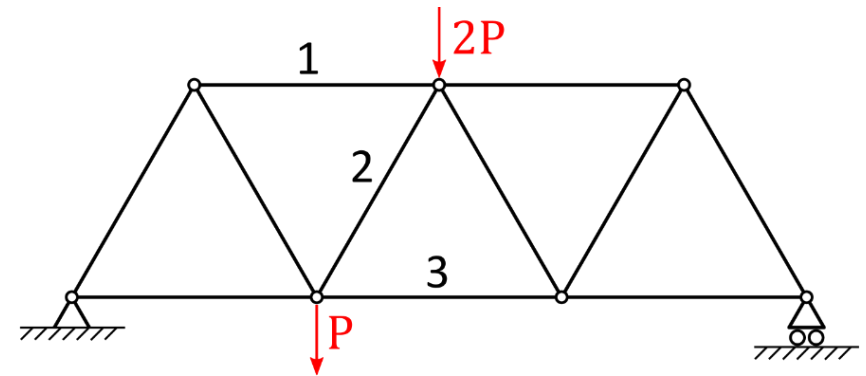
Typische Problemstellung

Gesucht:

Kraft in einem oder mehreren Stäben

Methoden:

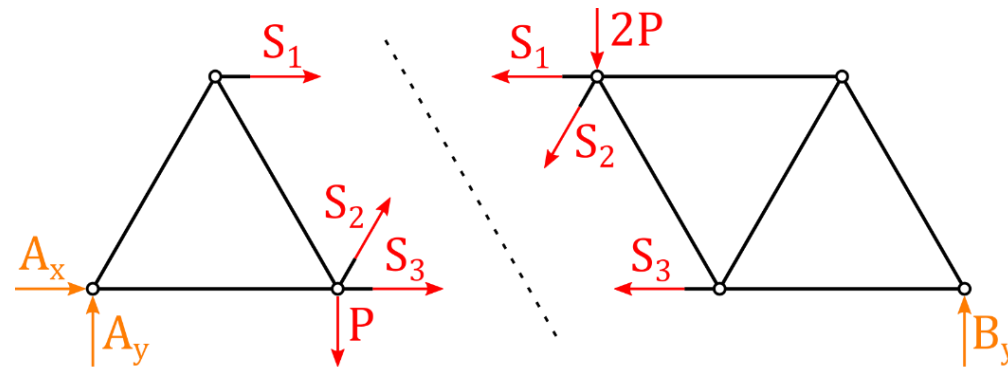
- Dreikräftechnitt
- Knotengleichgewicht
- Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)



Einführung Schnellübung 10

Dreikräftechnitt

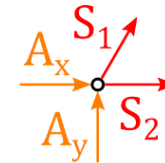
1. Lagerkräfte bestimmen
2. 3 unbekannte Stäbe schneiden und Stabkräfte einführen (vom Knoten weg)
3. Auflösen mit GGB (1 Gleichung liefert direkt die gesuchte Stabkraft, oft Momentenbedingung)



Einführung Schnellübung 10

Knotengleichgewicht

1. Lagerkräfte bestimmen (GGB)
2. Alle Stabkräfte als Zugkräfte einführen (vom Knoten weg)
3. Kräftegleichgewicht an jedem Knoten aufstellen und auflösen



$$R_x: 0 = A_x + S_2 + \frac{1}{2} S_1$$

$$R_y: 0 = A_y + \frac{\sqrt{3}}{2} S_1$$

Einführung Schnellübung 10

Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

- Vorgehensweise:
 1. Stab entfernen und durch Stabkräfte ersetzen → Mechanismus
 2. Virtuelle Bewegung wird eingeführt (\tilde{v} , $\tilde{\omega}$)
 3. Für Ruhelage → virtuelle Gesamtleistung $\tilde{P} = 0$
- Liefert eine Gleichung zur Bestimmung der gesuchten Stabkraft

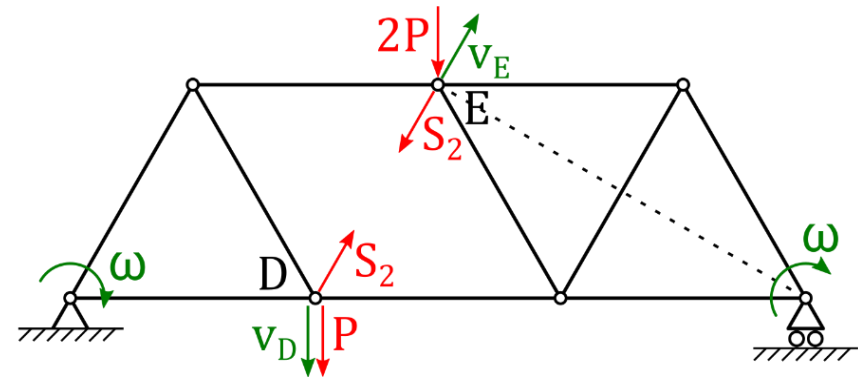
Einführung Schnellübung 10

PdvL für Stabkräfte

- Lagerkräfte irrelevant, falls virtuelle Bewegung am Mechanismus zulässig*

1. Stab entfernen und Stabkräfte einführen
2. Zulässige virtuelle Bewegung einführen
3. Starrkörper identifizieren
4. Bestimmung der Geschwindigkeiten der Knoten, an denen Kräfte angreifen

5. PdvL: $\tilde{P} = \sum \underline{F} \cdot \underline{\tilde{v}} = 0$



*Eine Bewegung ist zulässig, wenn sie keine Lagerbindungen (inklusive einseitige Bindungen) verletzt.

Auch $\underline{v} = 0$ ist eine zulässige Bewegung für einen Körper

Einführung Schnellübung 10

Allgemeine Tipps und Tricks

- Stabkraft immer vom Knoten weg einführen!
→ $S > 0$ entspricht Zug
- Parallelogrammregel, SdpG, SvMZ
- Komponentenweise Bestimmung von Geschwindigkeiten (x,y) häufig von Vorteil (nur für Skalarprodukt benötigte Komponenten berechnen!)

Tipps Schnellübung 10

Aufgabe 1

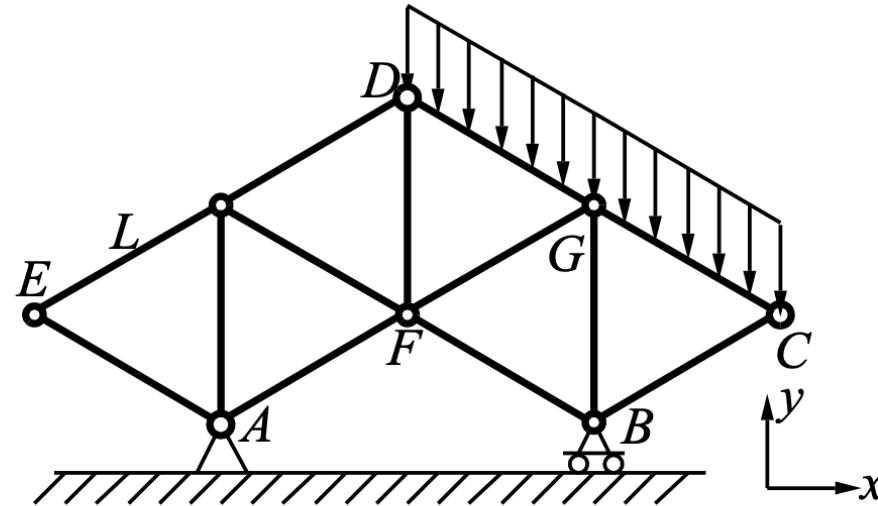
- Linienlast für jeden Stab einzeln reduzieren (und wieder kombinieren)
- DG und GC sind keine Pendelstützen, jedoch sind alle anderen Stäbe gemäss Annahmen für ideales Fachwerk analysierbar



Schnellübung 10

Aufgabe 1

Das skizzierte Fachwerk besteht aus gewichtslosen, mit reibungsfreien Gelenken miteinander verbundenen Stäben der Länge L . Es ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert und B reibungsfrei aufgelegt. Als Belastung wirkt eine gleichmässig über CD verteilte Last vom Gesamtbetrag P in Richtung $-\underline{e}_y$.



- Ist das Fachwerk ideal?
- Reduzieren Sie die Linienlast auf die Knoten D , G und C und berechnen Sie zunächst die Lagerkräfte in A und B . Ermitteln Sie dann die Kraft im Stab DF mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Leistung.



Lösung 1. a)

1. a) Das Fachwerk ist nicht ideal da durch die linienverteilte Kraft, die Stäbe DG_1 und G_1C Kräfte senkrecht auf ihre Richtung erfahren und dadurch keine Pendelstützen sind.

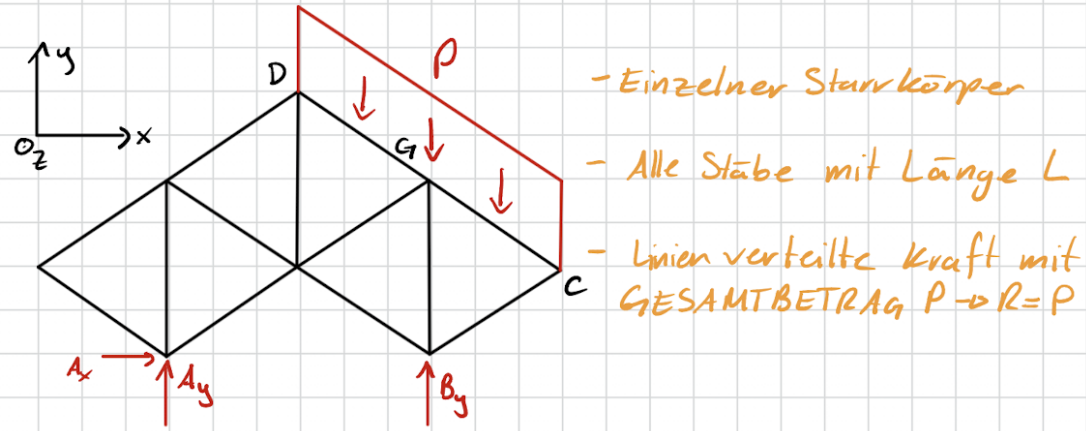


POLYBOX

Lösung 1. b)

1. Stäbe DG und GC trennen
2. Linienverteilte Kraft Reduzieren
3. Kraft auf Knoten verteilen

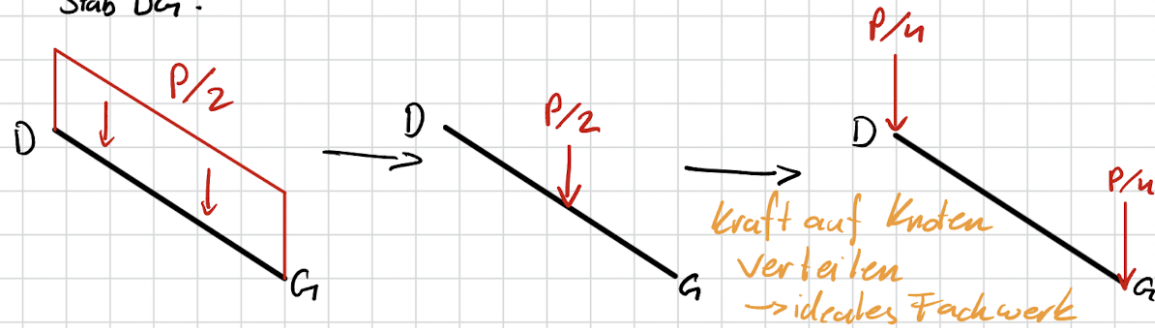
b)



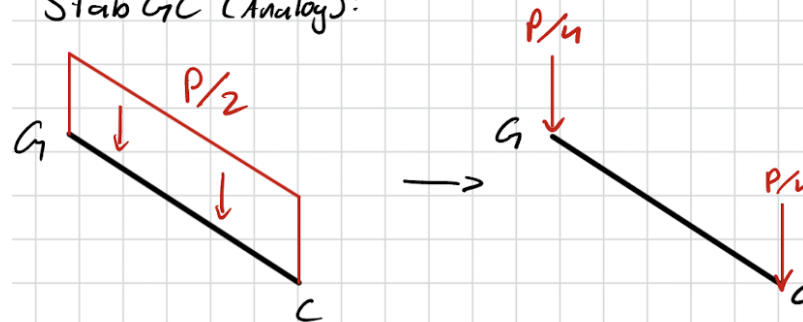
- Einzelner Starrkörper
- Alle Stäbe mit Länge L
- Linienverteilte Kraft mit GESAMTBETRAG $P \rightarrow R=P$

Linienverteilte Kraft auf Stäbe DG und GC reduzieren

Stab DG:

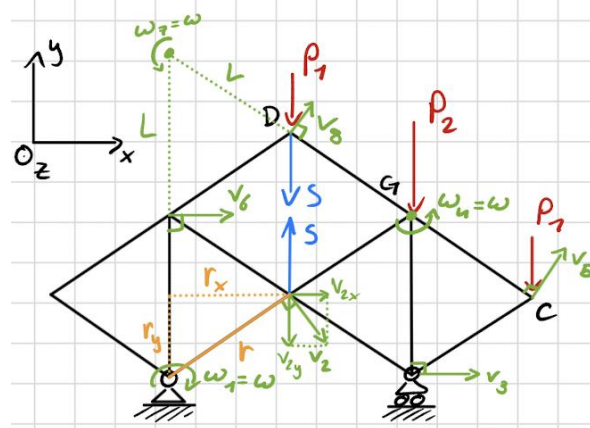


Stab GC (Analog):



Lösung 1. b)

7. Stab DF entfernen und Stabkraft S einzeichnen
8. Virtuelle Rotation im linken Lager einführen
9. Zuerst Richtung aller Geschwindigkeiten sowie Position und ω aller MZ finden
10. Nur nötige Geschwindigkeiten vektoriell berechnen
11. Leistung der virtuellen Bewegung = 0 setzen
12. Für S lösen



ω_1 : virtuelle rot. einführen

v_2 : Satz von MZ mit v_1

v_3 : S.d.p. G mit v_2 + Lagerung

ω_4 : Satz vom MZ mit $v_2 + v_3$

v_5 : Satz vom MZ mit ω_4

v_6 : Satz vom MZ mit ω_1

ω_7 : Satz vom MZ mit v_6 + Parallelogramm

v_8 : Satz vom MZ mit ω_7

mit r auf e_y projiziert

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{\omega L}{2}$$

mit r auf e_x projiziert

$$\underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{\omega L}{2}$$

$$\underline{v}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{\omega L}{2}$$

$$P = \underline{P}_1 v_6 + S v_2 + S v_5 + \underline{P}_3 v_8 = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \frac{\omega L}{2} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}P - \sqrt{3}S - \sqrt{3}S - \frac{\sqrt{3}}{4}P = 0$$

$$\frac{1}{2}P + 2S = 0$$

$$\underline{\underline{S = -\frac{1}{4}P}}$$



POLYBOX

Tipps Schnellübung 10

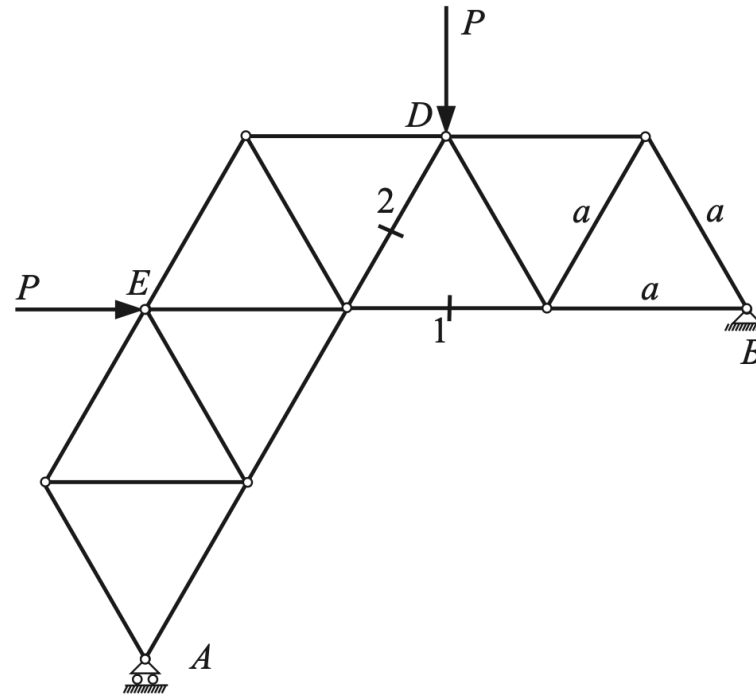
Aufgabe 2

- Zulässige Geschwindigkeit einführen: Welche Bewegungen verletzen die Bedingungen nicht?

Schnellübung 10

Aufgabe 2

Das abgebildete ideale Fachwerk besteht aus gleichlangen Stäben (Länge a , Gewicht vernachlässigbar), die reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. In den Knoten D und E greifen Kräfte von Betrag P an.

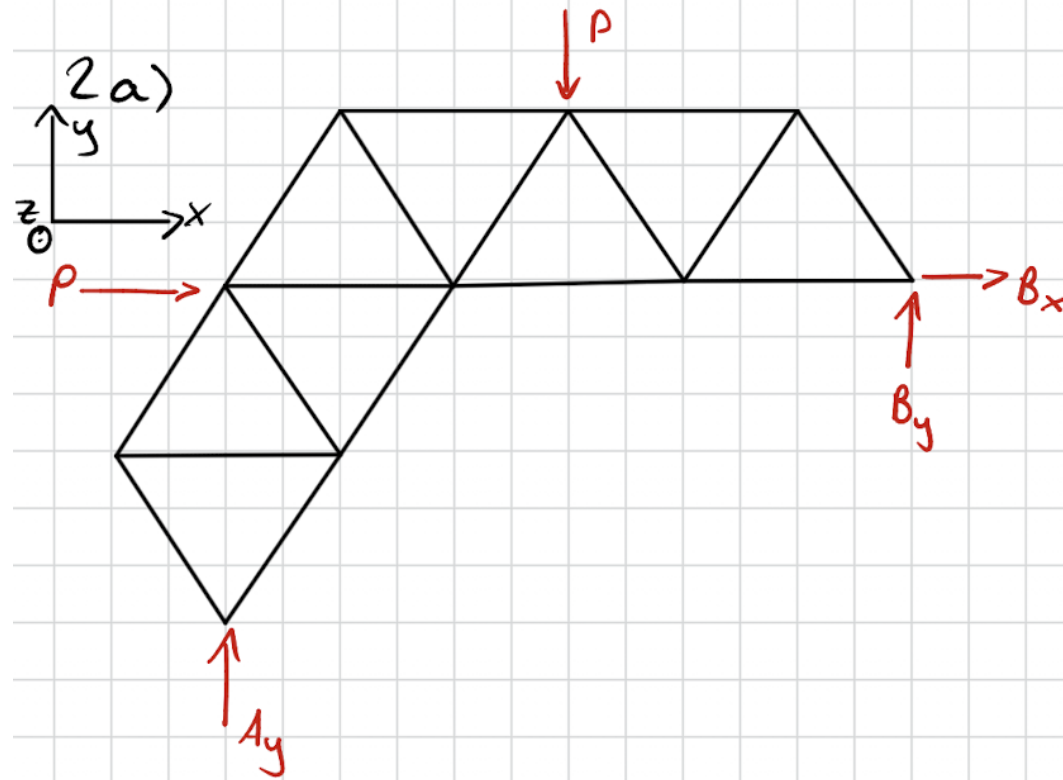


- Bestimmen Sie die Lagerkräfte in A und B .
- Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2 mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL).



Lösung 2.

1. GGB aufstellen und Lagerkräfte bestimmen



$$\sum F_x = 0: B_x = -P$$

$$\sum F_y = 0: A_y + B_y = P$$

$$\sum M_z^B = 0: \frac{3}{2}aP = 3aA_y$$

$$\hookrightarrow A_y = \frac{P}{2}$$

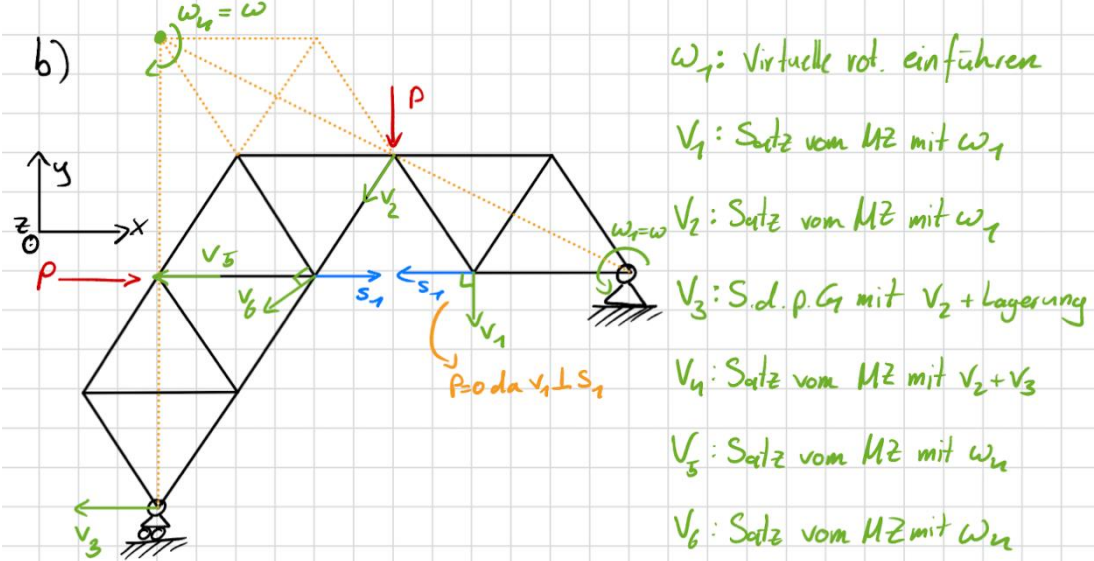
$$B_y = \frac{P}{2}$$



POLYBOX

Lösung 2.

2. Stab 1 entfernen und Stabkraft einzeichnen
3. Virtuelle Rotation um rechtes Lager einführen
4. Geschwindigkeiten wie in Aufgabe 1 bestimmen
5. Leistung = 0 setzen und für S_1 lösen



$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\omega_1 a}{2}$$

$$\underline{v}_5 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \omega a$$

$$\underline{v}_6 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \omega a$$

$$P = \underline{P} \cdot \underline{v}_2 + \underline{P} \cdot \underline{v}_5 + \underline{S}_1 \cdot \underline{v}_6 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \omega a = 0$$

$$= \frac{3}{2} P - \sqrt{3} P - \sqrt{3} S_1 = 0$$

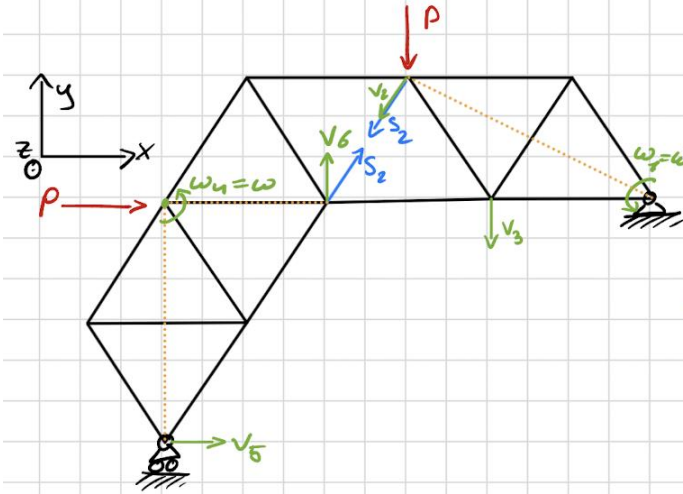
$$S_1 = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - 1 \right) P$$

$$\underline{S_1} = \underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) P}$$



Lösung 2.

6. Stab 2 entfernen
7. Rest analog zu vorherigen Aufgaben



ω_1 : Virtuelle rot. einführen

V_2 : Satz vom MZ mit ω_1

V_3 : Satz vom MZ mit ω_1

ω_4 : V_6 ist vertikal wegen S.d.p.G mit V_3 ,
 V_5 ist horizontal wegen Lagerung
 \rightarrow MZ im Schnittpunkt der Senkrechten,
 ω aus Parallelgrammregel

V_6 : Satz vom MZ mit ω_4

$$\underline{V}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \frac{wa}{2}$$

$$\underline{V}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} wa$$

$$\underline{S}_2 = \pm S_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$P = \underline{P}_1 \underline{V}_2 + \underline{S}_2 \underline{V}_2 + \underline{S}_2 \underline{V}_6 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} wa = 0$$

$$= \frac{3}{2} P + S_2 \sqrt{3} + S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$= \frac{3}{2} P + S_2 \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\underline{S_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} P}}$$



POLYBOX

Tipps Schnellübung 10

Aufgabe 3

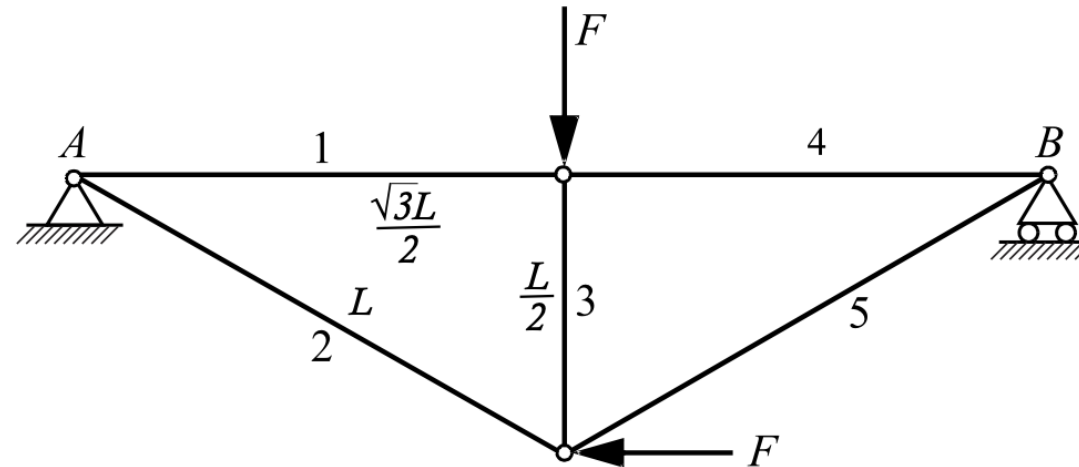
- Alle 3 Methoden anwendbar



Schnellübung 10

Aufgabe 3

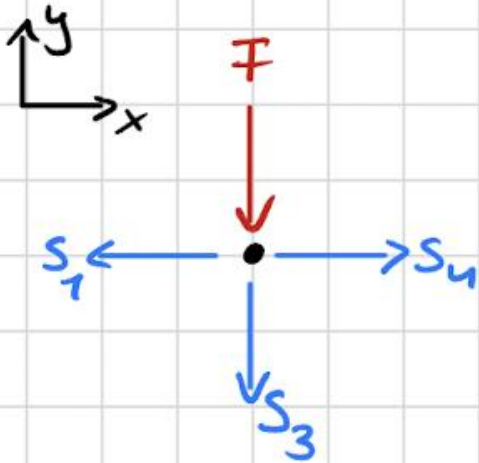
Ein ebenes Fachwerk besteht aus 5 gewichtslosen Stäben. Es ist in A gelenkig gelagert und liegt in B auf. Es wird wie eingezeichnet durch zwei Kräfte mit dem Betrag F belastet. Alle Gelenke sind reibungsfrei. Bestimmen Sie die Stabkraft S_3 .





Lösung 3.

3. Knotengleichgewicht zwischen Stäben 1, 3, 4:



$$\sum F_y = 0 : \underline{\underline{S_3 = -F}}$$

Tipps Hausübung 10

- Methode je nach Angemessenheit (Effizienz) wählen
- Auch der Zustand $\underline{v} = 0$ ist eine zulässige Bewegung für einen Körper
- Siehe auch Kolloquium

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)



Whatsapp-Gruppe



POLYBOX



Anonymes Feedback