Block 8: Kräfte in Fachwerken bestimmen

Gleichgewichtsbedingungen

Ist in der Aufgabenstellung erwähnt dass ein System im Gleichgewicht ist (was in der Statik so ziemlich immer der Fall ist), können wir die Gleichgewichtsbedingungen verwenden um alle gesuchten Kräfte zu finden. Sie sind unser bestes Werkzeug in solchen Aufgaben!

Wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen (GGB) aufstellen, sagen wir einfach dass die Resultierende und das Moment in einem beliebigen Punkt gleich Null sein müssen. Meistens teilen wir dabei die Resultierende und das Moment auf ihre Komponenten auf. So erhalten wir in 2D zwei Kräftegleichgewichte (in x- und y-Richtung) und ein Momentengleichgewicht (in z-Richtung). In 3D haben wir dann drei von Beiden, also sechs GGB insgesamt.

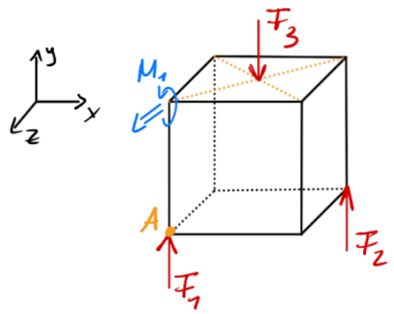
Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = 0, \sum M_x^A = 0$$

$$\sum F_y = 0, \sum M_y^A = 0$$

$$\sum F_z = 0, \sum M_z^A = 0$$

Das Kräftegleichgewicht aufzustellen ist meistens recht simpel. Für das Gleichgewicht in die x-Richtung summieren wir zum Beispiel einfach die x-Komponente aller Kräfte im System und setzen die Summe gleich Null. Wichtig zu beachten ist aber dass man mit den Vorzeichen konsistent bleibt. Entgegengesetze Kräfte sollen auch entgegengesetze Vorzeichen haben. Unten ist ein Beispiel für die Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen an einem Würfel mit Kantenlängen a.



$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

GGB:

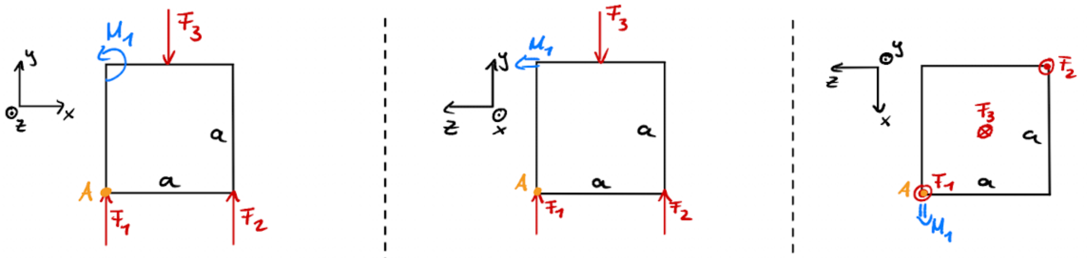
$$\sum F_x = 0: \quad 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$\sum F_z = 0: \quad 0 = 0$$

Das Momentengleichgewicht ist etwas schwieriger. Wir müssen dafür erstmals einen beliebigen Punkt auswählen. An diesem Punkt stellt man dann das Momentengleichgewicht in eine der drei Koordinatenrichtungen auf. Dann berechnet man das Moment, das jede Kraft auf diesem Punkt auslöst und summiert sie auf. Das ganze setzt man dann auch gleich Null, die Vorzeichen können mit der Rechten-Faust-Regel bestimmt werden.

Unten ist ein Beispiel für die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen am selben Würfel wie oben. Ich empfehle bei 3D problemen die Projektionen auf die jeweilige Ebene für jedes Momentengleichgewicht aufzuzeichnen um es übersichtlicher zu machen.



$\sum M_z^A = 0: F_2 a - F_3 \frac{a}{2} + M_1 = 0$

$\sum M_x^A = 0: F_2 a - F_3 \frac{a}{2} = 0$

$\sum M_y^A = 0: \; 0 = 0$

Fachwerke (nochmal!)

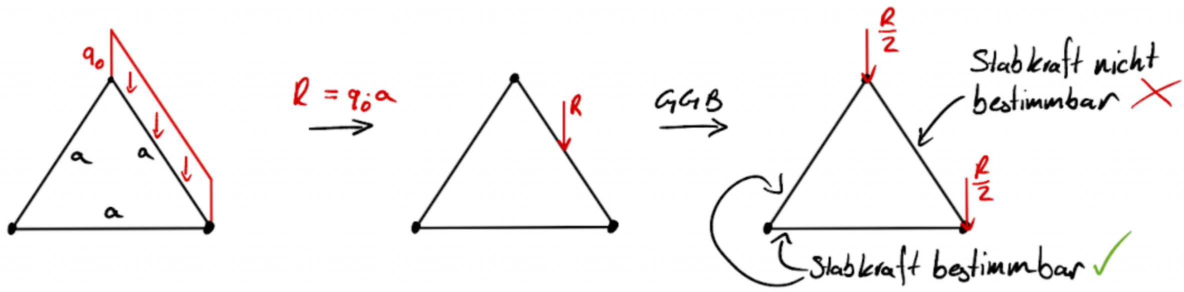
Fachwerkaufgaben haben wir ja bereits ausführlich im in der Kinematik angeschaut, nun ist es an der Zeit auch die Kräfte in einem idealen Fachwerk bestimmen zu können.

Dafür muss zuerst definiert werden, was wir überhaupt mit einem idealen Fachwerk meinen. Aus der Kinematik wissen wir dass Fachwerke Zusammensetzungen von einzelnen Stäben sind. Ideal sind sie sobalf sie folgende Bedingungen erfüllen:

- Alle Stäbe sind gewichtslose Starrkörper
- Knoten sind reibungsfreie Gelenke, die nur an Stab-Enden vorkommen
- Kräfte greifen nur an Knoten an
- Stabkräfte zeigen nur in Richtung des jeweiligen Stabs (Pendelstützen)

Stimmen diese vier Punkte, können wir alle Kräfte in einem Fachwerk bestimmen. Sonst zu bemerken ist dass solange der dritte Punkt stimmt, ist der vierte automatisch erfüllt.

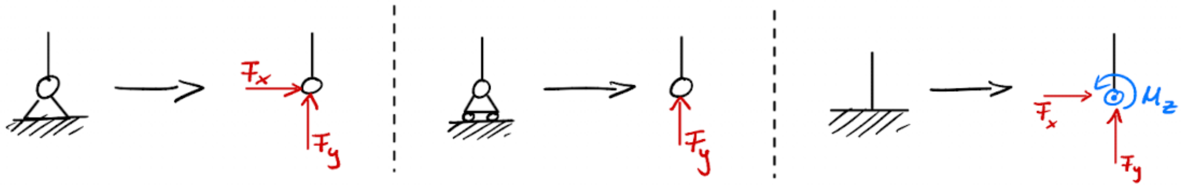
Ein Beispiel wo der dritte und vierte Punkt nicht erfüllt wird, ist wenn wir linienverteile Kräfte auf einem oder mehreren Stäben haben. In solchen Fällen könenn wir die Stabkräfte in diesen spezifischen Stäben nicht mit den Methoden in diesem Kapitel bestimmen. Wir könen aber die Linienverteilten Kräfte in jedem Stab reduzieren und dann mit den GGB auf beide Knoten des Stabs aufteilen. Somit können wir die restlichen Stabkräfte des Fachwerks weiterhin berechnen.



Lagerkräfte Bestimmen

Häufig sind Fachwerke, wie in der Kinematik, über Lagerungen mit dem Rest der Welt verbunden. Diese Lagerungen können auch Kräfte auf unser System bewirken und oft ist in Aufgaben gefragt, wie gross diese sind.

Und zwar können Lager immer in folgende Richtungen Kräfte bewirken, in denen sie keine Bewegung erlauben. Ein kurzes Auflager kann zum Beispiel nur eine Kraft Senkrecht zum Boden bewirken.



Um diese Kräfte bestimmen zu können, lassen wir die Lager weg und Zeichnen die dazugehörigen Lagerkräfte als Unbekannte ein. Dannach stellen wir die GGB für das System auf und bestimmen somit die Lagerkräfte

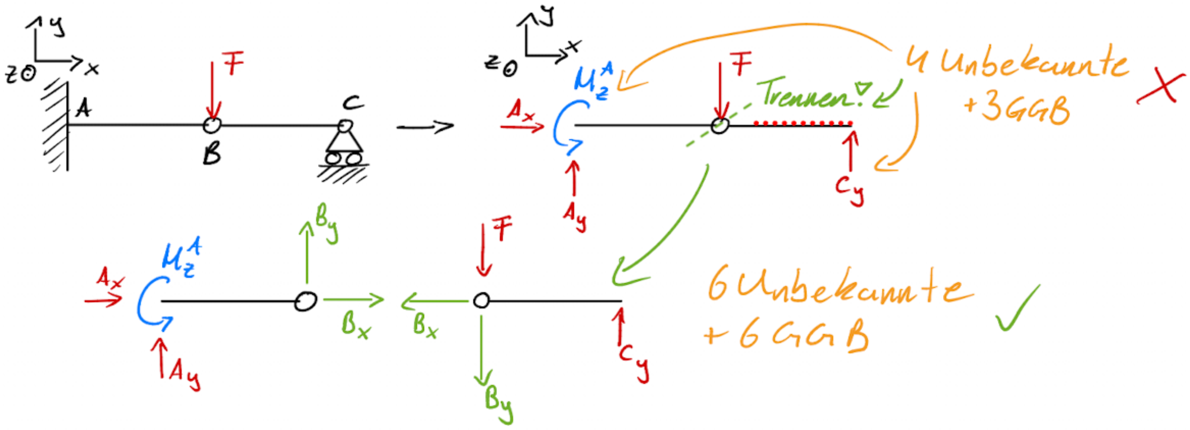
System Trennen

Manchmal suchen wir aber mehr Unbekannte als wir GGB haben. Zum Beispiel können vier unbekannte Lagerkräfte and einem 2D Fachwerk angreifen, wofür wir aber nur drei GGB haben.

In solchen Fällen trennt man das System auf folgende Art:

1. System an so vielen Knoten trennen, bis man zwei Starrkörper hat
2. An Knoten Bindungskräfte einführen (müssen in beiden Körpern in andere Richtung zeigen, um sich beim Zusammensetzen gegenseitig aufzulösen)
3. GGB für beide Starrkörper aufstellen

Nun haben wir zwar mehr Unbekannte wegen den Bindungskräften aber wir haben die Anzahl unabhängiger GGB verdoppelt. Wichtig zu bemerken ist dass sich die Systemtrennung nur dann lohnt, wenn man an Knoten trennt. Zerschneidet man ein System durch einen Starrkörper durch, findet man schnell heraus, dass man nichts Neues kriegt.



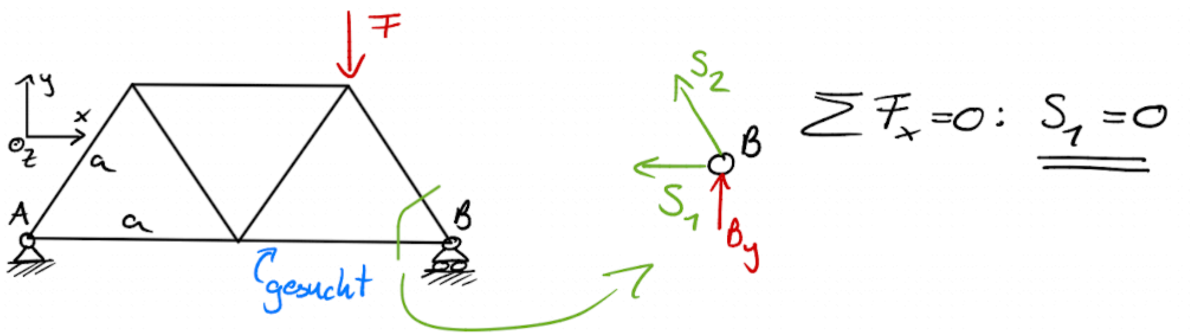
Stabkräfte bestimmen

Nun ist aber oft auch interessant, die Kräfte in den jeweiligen Stäben eines Fachwerks zu berechnen. Zugkräfte sind dabei nach Konvention positiv und Druckkräfte sind negativ. Zur Bestimmung stehen uns drei Methoden zur verfügung: Das Knotengleichgewicht, der Dreikräfteschnitt und das Prinzip der Virtuellen Leistung.

Das Knotengleichgewicht ist vom Konzept her die simpelste der drei Methoden. Wir gehen damit folgendermassen voran:

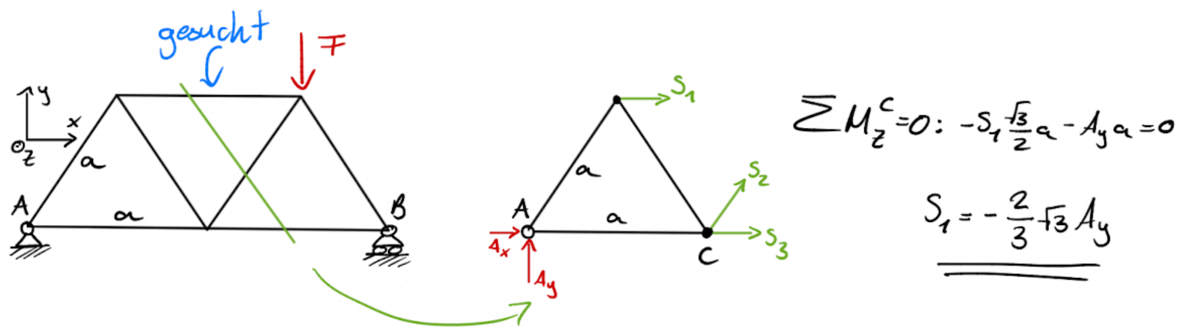
1. Alle Lagerkräfte bestimmen
2. Einer der Knoten des gesuchten Stabs wählen
3. Am Knoten alle Stäbe abtrennen und Stabkräfte (vom Knoten weg!) einführen
4. Kräftegleichgewicht im Knoten Lösen
5. Falls zu viele unbekannte Seilkräfte, neues Knotengleichgewicht an anderem Knoten aufstellen
6. Rinse and repeat bis man alles gefunden hat!

Der Grund weshalb wir die unbekannten Seilkräfte weg vom Knoten einzeichnen ist damit Zugkräfte positiv sind.



Mit dem Dreikräfteschnitt kann man die Gesuchte Stabkraft direkt mit einer einzigen GGB finden. Mit dieser Methode Lösen wir auf folgende Weise

1. Alle Lagerkräfte bestimmen
2. Drei Stäbe durchschneiden
3. Stabkräfte von Knoten weg einführen
4. Mit geschickt plazierten Momenten GGB direkt die gesuchte Seilkraft finden



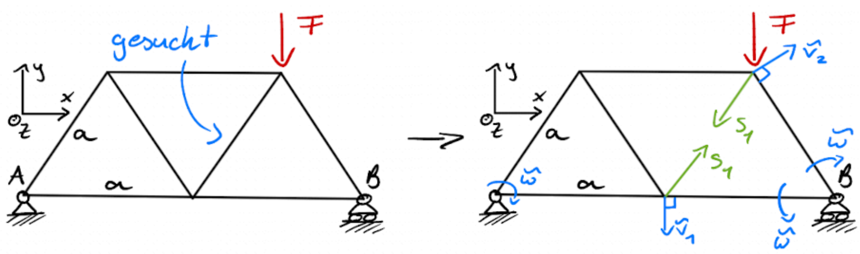
Das Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL) erlaubt uns mit etwas Kinematik und gutem Überlegen ebenfalls recht schnell an die gesuchte Stabkraft zu kommen. Jedoch braucht diese Methode auch am meisten Übung um sie effizient anwenden zu können. Sie funktioniert folgendermassen:

1. Gesuchten Stab entfernen
2. Stabkraft weg von Knoten einführen
3. (am besten zulässige) virtuelle Bewegung einführen
4. Geschwindigkeit an jedem Punkt einführen, an dem eine Kraft angreift
5. Skalarprodukte zwischen Kraft und Geschwindigkeit am gleichen Punkt berechnen
6. Alle Skalarprodukte Aufsummieren -> Leistung
7. Leistung = 0 setzen
8. Für Stabkraft lösen

Zulässig heisst in diesem Kontext, dass unsere eingeführte Bewegung die Lagerung des Fachwerks nicht verlezt. Also Stäbe, die gelenkig gelagert sind, dürfen zum Beispiel keine Translation durchführen sondern nur eine Rotation um das Lager. Virtuell heisst einfach dass diese Bewegung eigentlich nicht wirklich existiert, wir führen sie nur ein um eine Kraft zu berechnen.

Der Grund weshalb wir einen zulässigen Bewegungszustand wollen, ist damit wir die Lagerkräfte nicht bestimmen müssen! Lagerkräfte wirken ja immer nur in die Richtungen, in denen die Lagerung keine Bewegung erlaubt. Das heisst das Skalarprodukt zwischen einer Lagerkraft und ihrer zulässigen Geschwindigkeit ist immer gleich Null! Theoretisch kann man auch eine unzulässige Bewegung einführen, dann muss man aber auch die Lagerkräfte bestimmen und somit hat man erfolgreich den grössten Vorteil des PdvLs aus dem Fenster geschmissen ☺ (Ausser man will mit dem PdvL eine Lagerkraft bestimmen, dann machts Sinn).

Tipp: Ich rechne meistens beim PdvL mit der Vektoriellen Notation, somit muss man den Winkel zwischen der Kraft- und Geschwindigkeitvektoren nicht finden und man muss unnötige komponenten der Geschwindigkeit nicht berechnen. Hat zum Beispiel eine Kraft an einem Punkt nur eine y Komponente, muss ich auch nur die y Komponente der Geschwindigkeit berechnen.



$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}_2 + \underline{S}_1 \cdot \underline{v}_2 + \underline{S}_1 \cdot \underline{v}_1 = 0$$

↳ S_1 bestimmen