POLYBOX

Schnellübung 11

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 11

Schwerpunkt:

Körper mit konstanter Dichte (Volumenintegrale):

$$x_s = \frac{\int_K x \, dV}{V} \qquad y_s = \frac{\int_K y \, dV}{V} \qquad z_s = \frac{\int_K z \, dV}{V}$$

Schwerpunkte von mehreren Teilkörpern zusammenfassen:

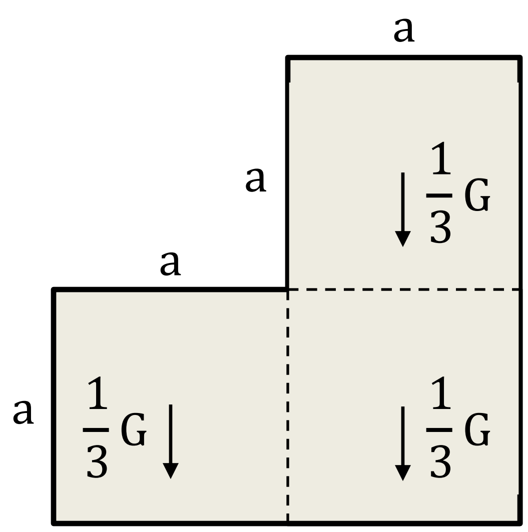
$$x_s = \frac{\sum m_i x_{s,i}}{m_{ges}} \qquad y_s = \frac{\sum m_i y_{s,i}}{m_{ges}} \qquad z_s = \frac{\sum m_i z_{s,i}}{m_{ges}}$$

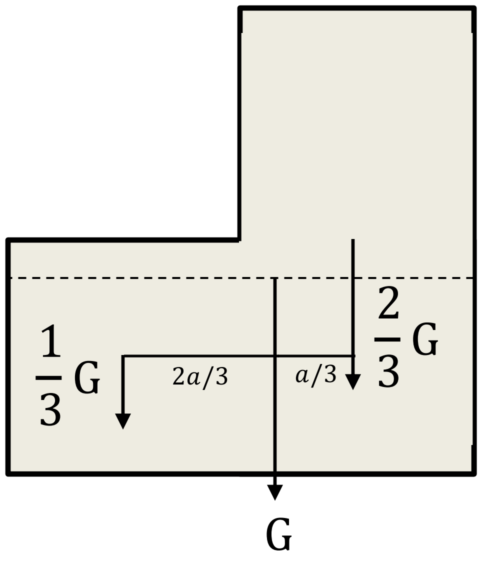
(mit $x_{s,i}$, $y_{s,i}$, $z_{s,i}$ als Teilschwerpunkte; m_i als Teilmassen)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 11

Schwerpunkt eines homogenen Körpers mit Gewicht G





Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 11

Reibung

In reellen Systemen tritt in der Berührungsfläche zwischen zwei Körpern immer Reibung auf.
Man unterscheidet zwischen **Haft-** und **Gleitreibung:**

Haftreibung:

$|\underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}| < \boldsymbol{\mu_0}|\underline{\boldsymbol{N}}|$
mit Haftreibungszahl μ_0

Achtung: Ungleichung kann nicht zum Berechnen der Kräfte am System verwendet werden.

Gleitreibung:

$|\underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}| = \boldsymbol{\mu_1}|\underline{\boldsymbol{N}}|$
mit Gleitreibungszahl μ_1

Eine zusätzliche Gleichung für die Lösung des Systems.
Die Gleichgewichtsbedingungen gelten auch für einen Körper im homogenen Bewegungszustand.

Einführung Schnellübung 11

Prozedere Reibung

1. Systemabgrenzung
2. Berührungsfläche identifizieren und Reibungskraft entgegen (voraussichtlicher) Bewegung einführen. Unbekannte: $\underline{\boldsymbol{N}}, \underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}$ und $\boldsymbol{e}$
3. GGB
4. In Haftreibungsgesetz zur Diskussion einsetzen
   oder
5. Gleitreibungsgesetz für zusätzliche Gleichung

Tipps Schnellübung 11

Aufgabe 1

- Normalkraft:
    - Einführen der Normalkraft innerhalb der Standfläche (x_N, y_N)
- Schwerpunkt:
    - y und z Komponenten sehr einfach
    - Teilkörper betrachten

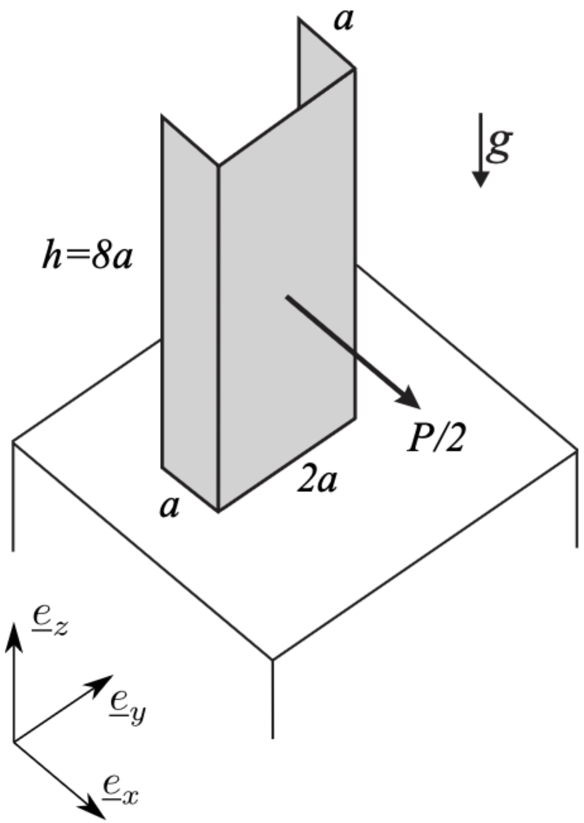
Schnellübung 11

POLYBOX

Aufgabe 1

Ein zweimal um 90° abgewinkeltes dünnes Blech mit dem gegebenen Gewicht G steht gemäss Abbildung senkrecht auf einer horizontalen rauhen Ebene mit der Haftreibungszahl $\mu_0 = 0.15$. An ihm greift im Schwerpunkt des mittleren Rechtecks eine horizontale Kraft $\frac{P}{2}\underline{e}_x$ an.

Für welche Werte von P setzt sich das Blech in Bewegung ohne zu Kippen?



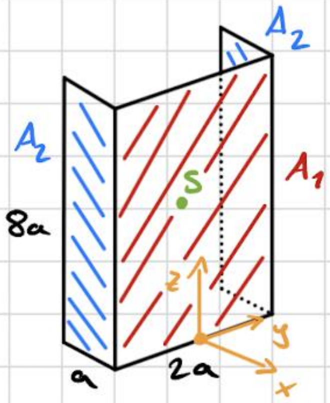
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. y_s und z_s mit Symmetrie bestimmen
2. x_s mit Formel bestimmen
3. System in xz Ebene Zeichnen und GGB aufstellen
4. Bedingungen Aufstellen

POLYBOX

1.

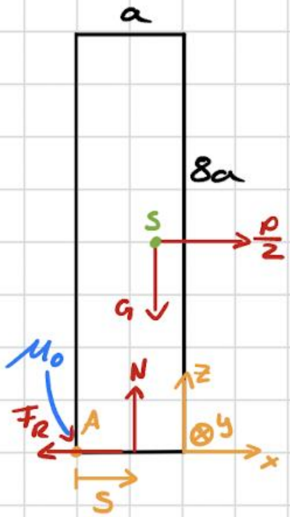


$y_s = 0$, $z_s = 4a$ → Symmetrie

$$x_s = \frac{x_{s_1}\cdot A_1 + x_{s_2}\cdot 2A_2}{A_1 + 2\cdot A_2}$$

$$x_s = \frac{0\cdot 16a^2 + (-\frac{a}{2})\cdot 2\cdot 8a^2}{16a^2 + 2\cdot 8a^2} = -\frac{8}{32}a$$

$$\underline{\underline{x_s = -\frac{a}{4}}}$$



I: $\sum F_x = 0$: $F_R = \frac{P}{2}$

II: $\sum F_z = 0$: $N = G$

III: $\sum M_y^A = 0$: $G\cdot\frac{3}{4}a + \frac{P}{2}\cdot 4a = N\cdot s$

2 Bedingungen:

1. Nicht kippen: $0 < s < a$
2. Rutschen: $|F_R| > \mu_0 |N|$

Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

5. Alle P finden, die 1. Bedingung erfüllen
6. Alle P finden, die 2. Bedingung erfüllen

$$\text{I}: \sum F_x = 0: \quad F_R = \frac{P}{2}$$

$$\text{II}: \sum F_z = 0: \quad N = G$$

$$\text{III}: \sum M_y^A = 0: \quad G \cdot \frac{3}{4}a + \frac{P}{2} \cdot 4a = N \cdot s$$

1. Nicht kippen : $0 < s < a$

$$\text{II} + \text{III}: \quad G \cdot s = G \cdot \frac{3}{4}a + \frac{P}{2} \cdot 4a$$

$$s = \frac{3}{4}a + \frac{P}{G} \cdot 2a$$

$0 < s$:

$$0 < \frac{3}{4}a + \frac{P}{G} \cdot 2a$$

$$-\frac{3}{4} < 2\frac{P}{G}$$

$$\boxed{P > -\frac{3}{8}G} \quad ①$$

$s < a$:

$$\frac{3}{4}a + \frac{P}{G} \cdot 2a < a$$

$$\frac{P}{G} \cdot 2 < \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P < \frac{G}{8}} \quad ②$$

2. Rutschen : $|F_R| > \mu_0 |N|$

$$\text{I}: F_R = \frac{P}{2}, \quad \text{II}: N = G$$

$$\left|\frac{P}{2}\right| > \mu_0 G$$

$P > 0$:

$$\frac{P}{2} > \mu_0 G$$

$$P > 2\mu_0 G$$

$$\boxed{P > 0.3G} \quad ③$$

$P < 0$:

$$\frac{P}{2} < -\mu_0 G$$

$$P < -2\mu_0 G$$

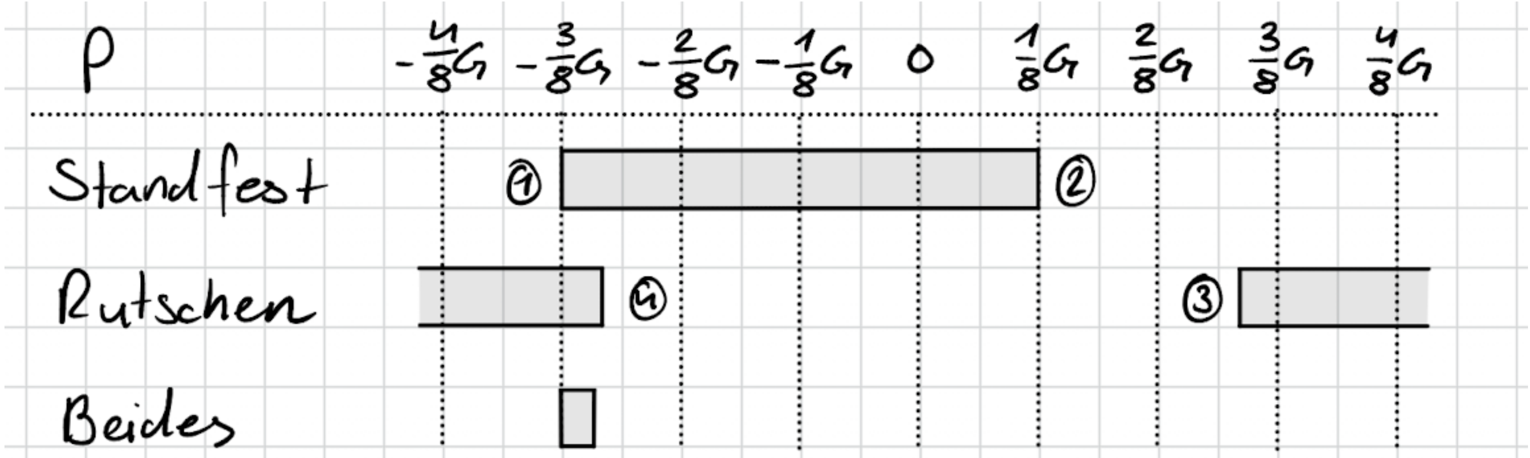
$$\boxed{P < -0.3G} \quad ④$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

POLYBOX



$\boxed{P > -\frac{3}{8}G}$ ①

$\boxed{P < \frac{G}{8}}$ ②

$\boxed{P > 0.3G}$ ③

$\boxed{P < -0.3G}$ ④

$$\rightarrow \underline{\underline{\underset{-\frac{3}{8}}{-0.375G} < P < 0.3G}}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 11

Aufgabe 2

a) Richtung der Normalkräfte?

Für Momenten-GGW: Gewichtskraft $\underline{G}$ in Komponenten entlang Würfelkanten zerlegen

b) Richtungssinn der Reibungskräfte?

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 11

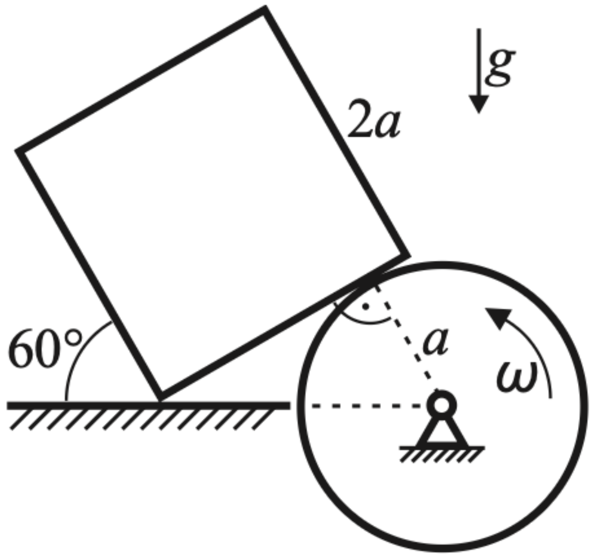
POLYBOX

Aufgabe 2

Ein Würfel (Kantenlänge $2a$, Gewicht G) ist auf einer Horizontalebene abgestützt und an einen Drehzylinder (Radius a) gelehnt. Der Drehzylinder wird von einem externen Motor angetrieben, sodass er sich mit der konstanten Rotationsschnelligkeit ω um die Zylinderachse dreht. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Würfel und Horizontalebene beträgt $\mu_0 = \sqrt{3}/9$ und die Gleitreibungszahl zwischen Würfel und Zylinder sei $\mu_1 < 1$.

a) Unter der Voraussetzung, dass der Würfel in Ruhe bleibt, bestimmen Sie die an ihm angreifenden Kräfte.

b) Welchen Wert darf μ_1 höchstens haben, damit der Würfel überhaupt in Ruhe sein kann?

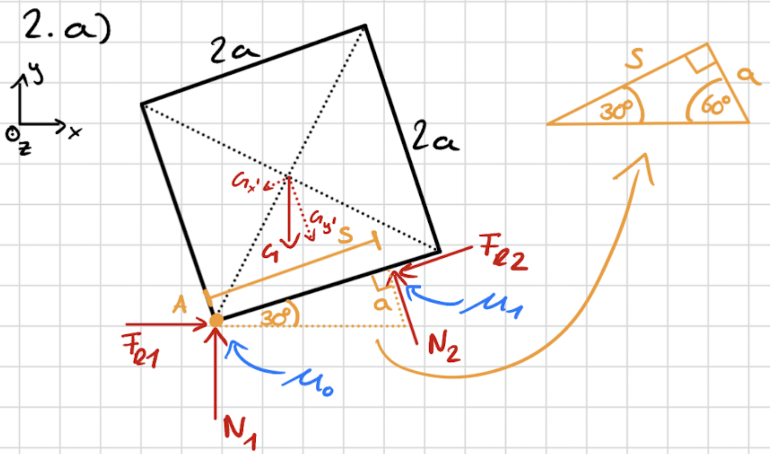


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2. a)

1. Seitenlänge s finden
2. GGB aufstellen und vereinfachen
3. Gleitreibungsbedingung für F_{R2}

2. a)



$s = a \cdot \tan(60°)$

$s = \sqrt{3}a$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{R1} - N_2 \sin(30°) - F_{R2}\cos(30°) = 0$$

$$F_{R1} - \frac{1}{2}N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R2} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad N_1 + N_2\cos(30°) - F_{R2}\sin(30°) - G = 0$$

$$N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 - \frac{1}{2}F_{R2} - G = 0$$

$$\sum M_z^A = 0: \quad G_{x'} \cdot a - G_{y'} \cdot a + N_2 \cdot s = 0$$

$$G\sin(30°)\, a - G\cos(30°) \cdot a + N_2 \cdot \sqrt{3}a = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Ga + N_2\sqrt{3}a = 0$$

$$\mathrm{I}: \sum F_x = 0: \quad F_{R1} - \frac{1}{2}N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R2} = 0$$

$$\mathrm{II}: \sum F_y = 0: \quad N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 - \frac{1}{2}F_{R2} - G = 0$$

$$\mathrm{III}: \sum M_z^A = 0: \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Ga + N_2\sqrt{3}a = 0$$

$$\mathrm{IV}: \quad F_{R2} = \mu_1 N_2$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2. a)

POLYBOX

4. Für alle Normal- und Reibungskräfte Lösen

$$\mathrm{I}: \sum F_x = 0: F_{R1} - \frac{1}{2} N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R2} = 0$$

$$\mathrm{II}: \sum F_y = 0: N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 - \frac{1}{2} F_{R2} - G = 0$$

$$\mathrm{III}: \sum M_z^A = 0: \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) G a + N_2 \sqrt{3} a = 0$$

$$\mathrm{IV}: F_{R2} = \mu_1 N_2$$

$$\mathrm{III}: N_2 \sqrt{3} a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) G a$$

$$N_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) G$$

$$\underline{\underline{N_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} G}} \quad (1)$$

$$(1) + \mathrm{IV}: F_{R2} = \mu_1 N_2 = \underline{\underline{\mu_1 \frac{3-\sqrt{3}}{6} G}} \quad (2)$$

$$(1) + (2) + \mathrm{I}: F_{R1} = \frac{1}{2} N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R2} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2} + \mu_1 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{3-\sqrt{3}}{6} G}} \quad (3)$$

$$(1) + (2) + \mathrm{II}: N_1 = \frac{1}{2} F_{R2} - \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 + G = \left(\mu_1 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{3-\sqrt{3}}{6} G + G$$

$$N_1 = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3-\sqrt{3})}{6} + 1\right) G = \underline{\underline{\left(\frac{(\mu_1 - \sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{12} + 1\right) G}} \quad (4)$$

Lösung 2. b)

1. Haftreibungsbedingung am Punkt A überprüfen

b) In Ruhe → Ecke am Boden darf nicht rutschen

$\rightarrow F_{R1} < \mu_0 N_1$

③ + ④: $(\mu_1\sqrt{3}+1)\frac{3-\sqrt{3}}{12}\cancel{G} < \mu_0\left(\frac{(\mu_1-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{12}+1\right)\cancel{G}$

Vereinfachen...

$$(\mu_1\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3}) < \mu_0\left((\mu_1-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+12\right)$$

$$\mu_1\sqrt{3}+1 < \mu_0\left(\mu_1-\sqrt{3}+\frac{12}{3-\sqrt{3}}\right)$$

$$\mu_1\sqrt{3}-\mu_1\mu_0 < -\sqrt{3}\mu_0+\frac{12}{3-\sqrt{3}}\mu_0-1$$

$$\mu_1(\sqrt{3}-\mu_0) < -\sqrt{3}\mu_0+\frac{12}{3-\sqrt{3}}\mu_0-1 \qquad \| \ \mu_0=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\mu_1\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right) < -\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{9-3\sqrt{3}}-1$$

$$\mu_1\frac{8}{9}\sqrt{3} < \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}-\frac{4}{3}$$

$$\mu_1\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}+3}{6}-\frac{1}{3}$$

$$\mu_1\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}-1}{6}-\frac{1}{3}$$

$$\mu_1\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}-3}{6}$$

$$\mu_1 < \frac{9}{2}\frac{\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}$$

$$\mu_1 < \frac{\cancel{3}}{4}\frac{3-3\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$\underline{\underline{\mu_1 < \frac{3-3\sqrt{3}}{4}}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 11

Aufgabe 3

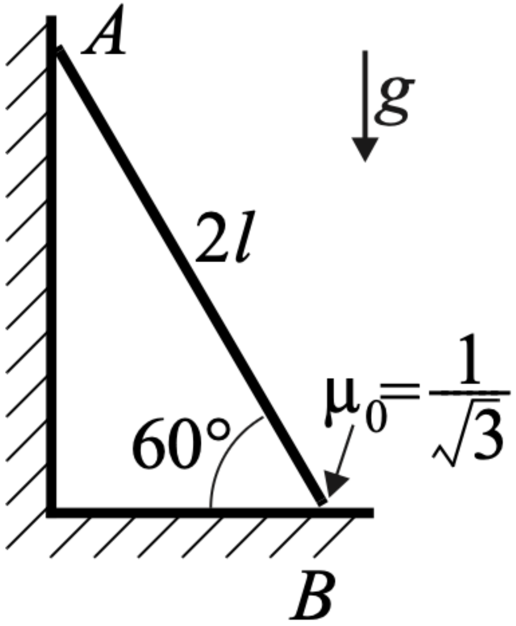
- Richtung der Normalkräfte?
- Richtungssinn der Reibungskraft?

Schnellübung 11

POLYBOX

Aufgabe 3

Ein Stab mit der Länge $2l$ und Gewicht G lehnt an einer glatten Wand, d.h. die Berührung im Punkt A ist reibungsfrei. Zwischen Stab und Boden ist der Reibungskoeffizient $\mu_0 = {}^1/\sqrt{3}$. Falls der Stab in einer Ruhelage ist, wie gross ist die Reibungskraft F_R im Punkt B? Ist das System wirklich in Ruhe?

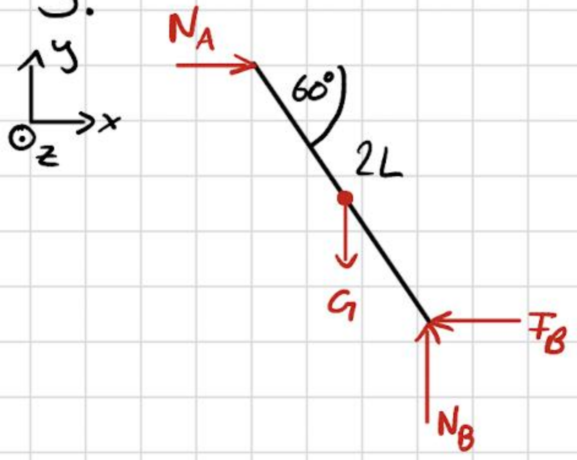


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. GGB aufstellen
2. Normal und Reibungskraft finden
3. Haftreibungsbedingung überprüfen

3.



$$\sum F_x = 0: \; F_B = N_A$$

$$\sum F_y = 0: \; N_B = G$$

$$\sum M_z^B = 0: \; G \cdot \tfrac{1}{2} L - N_A \sqrt{3}\, L = 0$$

$$N_A = \frac{\sqrt{3}}{6} G$$

$$F_B = N_A = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{6} G}}$$

Ruhelage überprüfen → $F_B < \mu_0 N_B$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} G < \mu_0 G \qquad // \; \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} G < \frac{\sqrt{3}}{3} G$$

✓ → System ist in Ruhelage

POLYBOX

Tipps Hausübung 11

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Komponenten der Flächenkraft (Abhängigkeit von ϕ beachten)

Flächenkraftdichte $\underline{s} \longrightarrow \underline{F} = \iint_M \underline{s} dA$ (über Mantelfläche), Vektor in kartesischer Basis ausdrücken

Um mit einem Winkel ϕ über die Länge zu integrieren, wird R benötigt: $Rd\phi$

Aufgabe 3

- Symmetrisch bezüglich der Geraden x = y
- Variable für den Abstand des Schwerpunkts in Geradenrichtung einführen
- Berechnung des Schwerpunkts mittels Formel

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback