Schnellübung 12

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

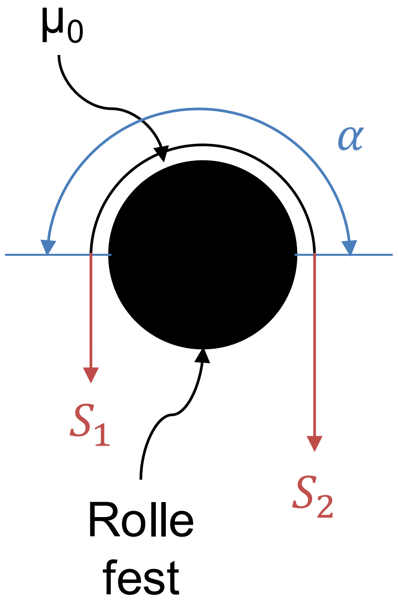
POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 12

Seilreibung

$$\text{Für } S_2 > S_1 : S_2 < S_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$$



α: Umschlingungswinkel
μ_0: Haftreibungskoeffizient

Aus GGB am infinitesimalen Seilelement und Haftreibungsgesetz zwischen Seil und Rolle.

Tipp: $e^{\mu_0 \alpha}$ steht immer auf der “Seite“ der schwächeren Kraft (hier: S_1). Reibung wirkt entgegen der voraussichtlichen Bewegung.

Schnellübung 12

Beanspruchung - Definition

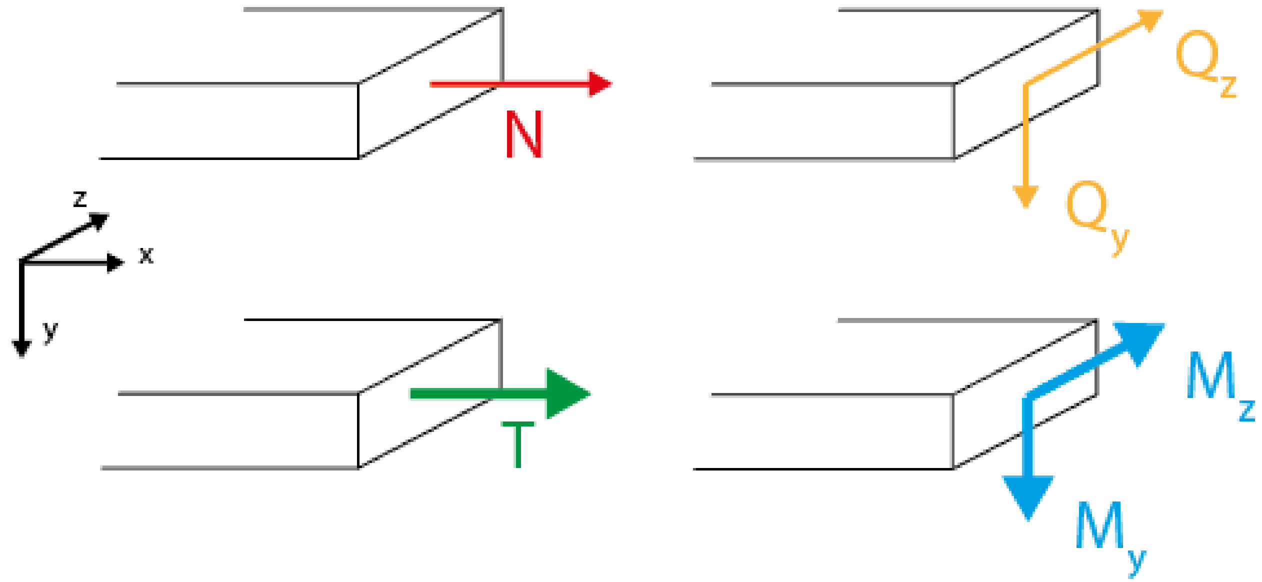
Lasten am Querschnitt eines Stabträgers (Dyname im Flächenmittelpunkt):

Kräfte:

- Normalkraft N: Zug ($N > 0$) oder Druck ($N < 0$)
- Querkräfte Q_y, Q_z: Schub

Momente:

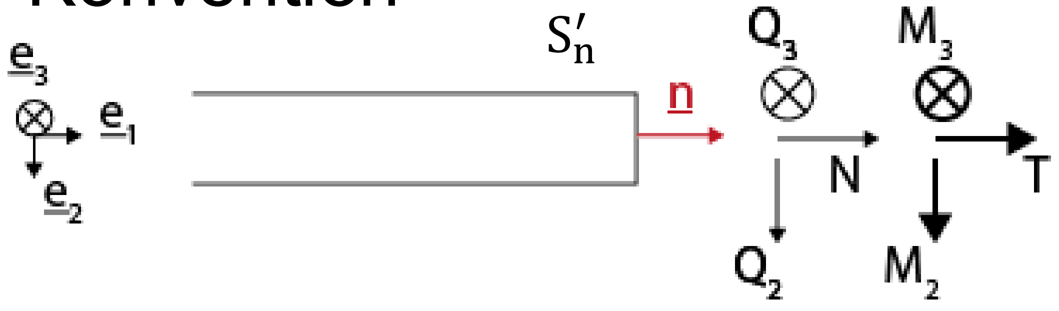
- Torsionsmoment T: Torsion
- Biegemomente M_y, M_z: Biegung

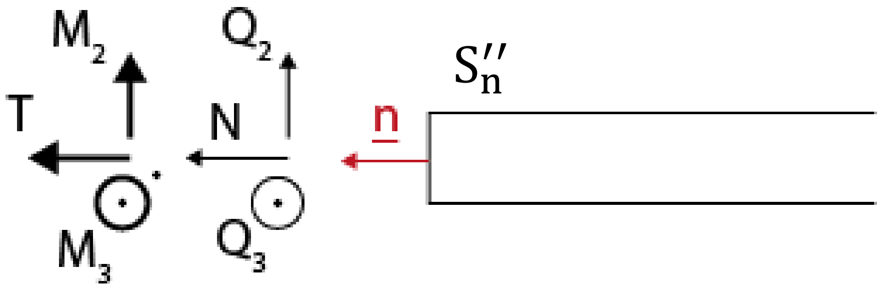


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 12

Beanspruchung - Konvention





Basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ (Rechtssystem) mit Richtung der äusseren Normalen $\underline{n}$ zur Schnittfläche S_n' gleich wie $\underline{e}_1$

Hilft Vorzeichenfehler zu vermeiden.

Warum Konvention?

Schnellübung 12

Beanspruchung - Vorgehen

1) Koordinatensystem und Basisvektoren einführen
2) System freischneiden (gegebenenfalls Systemtrennung)
3) Lagerkräfte bestimmen (verteilte Kraft auf Einzelkraft reduzieren)
4) Balken schneiden (**MIT** verteilter Kraft)
5) An Stellen, wo eine Einzelkraft, ein Einzelmoment oder eine verteilte Kraft angreift, muss ein neuer Teil begonnen werden
6) Für jeden Teil eine Laufvariable einführen und **Definitionsbereich** festsetzen
7) Verteilte Kraft kann jetzt wieder auf eine Einzelkraft reduziert werden
8) 2D: N, Q, M gemäss **Konvention** bei Schnitt einführen
   3D: N, Q_1, Q_2, T, M_1, M_2 gemäss **Konvention** bei Schnitt einführen
9) GGB formulieren und Beanspruchungskomponenten ausrechnen

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 12

Aufgabe 1

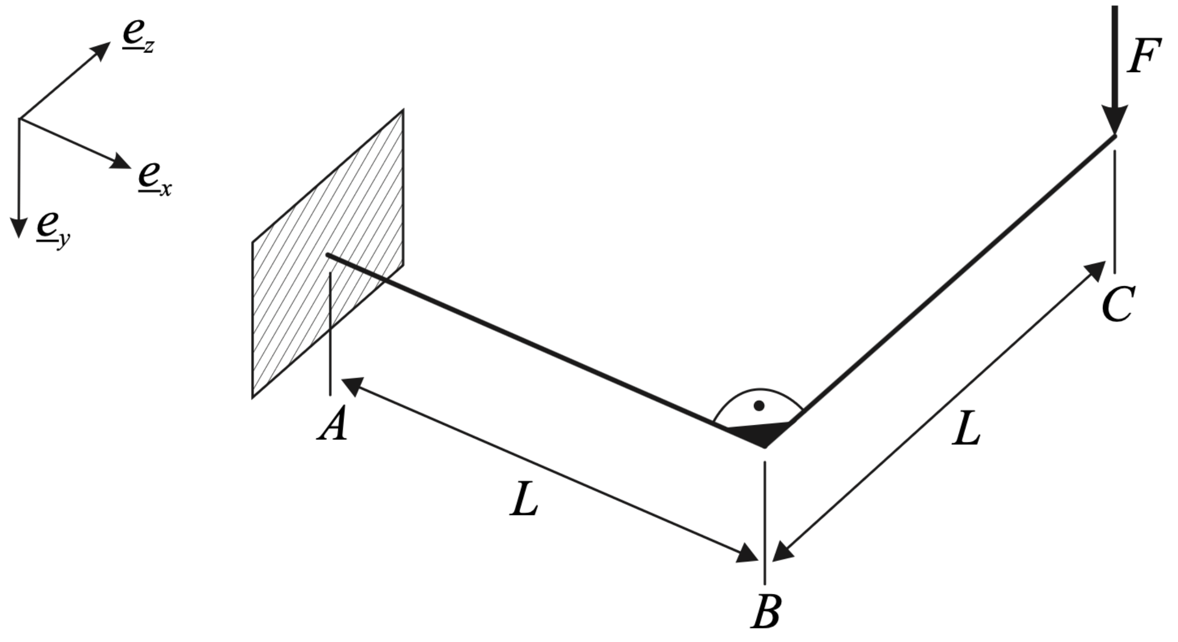
Müssen die Lagerkräfte unbedingt berechnet werden?

Schnellübung 12

POLYBOX

Aufgabe 1

Auf den L-Träger wirkt, wie in der Skizze dargestellt, im Punkt C die Kraft F in positive y-Richtung. Man bestimme die Beanspruchung im ganzen Träger.

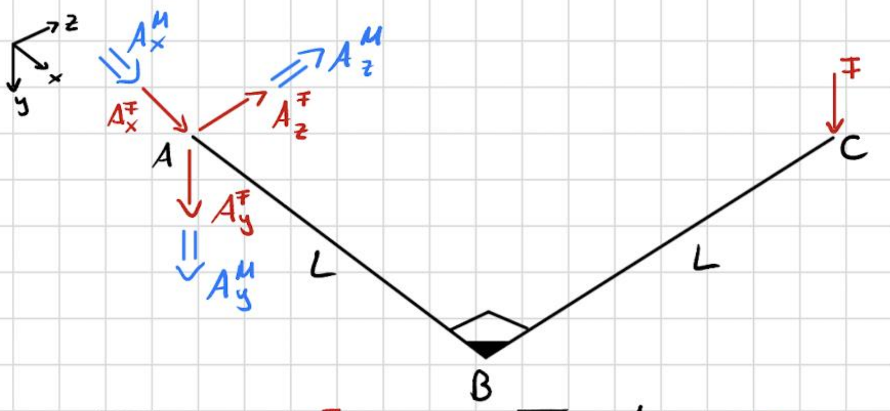


Lösung 1.

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Stab AB trennen und schneiden
3. Schnittstelle mit Koordinate x_1 beschreiben und x_1 in globales KOS übersetzen
4. Unbekannte Beanspruchungskräfte in positive Koordinatenrichtung einzeichnen
5. Mit GGB bestimmen

1.

$\rightarrow$ Kräfte
$\Rightarrow$ Momente

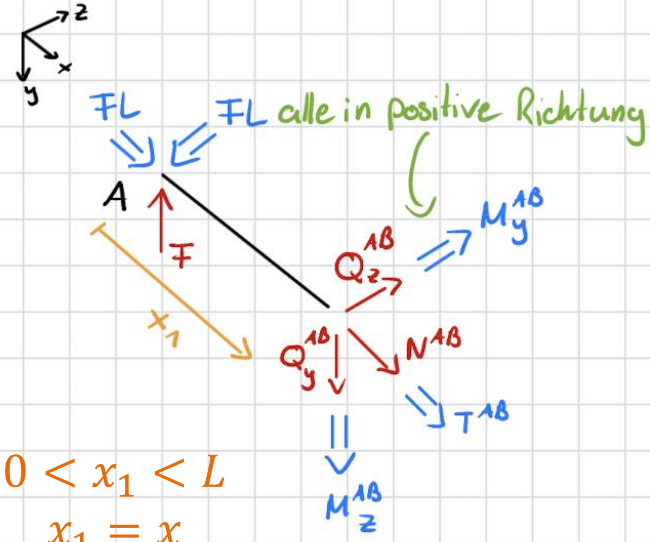


$\sum F_x = 0: A_x^F = 0$ $\quad\quad$ $\sum M_x^A = 0: A_x^M = FL$

$\sum F_y = 0: A_y^F = -F$ $\quad\quad$ $\sum M_y^A = 0: A_y^M = 0$

$\sum F_z = 0: A_z^F = 0$ $\quad\quad$ $\sum M_z^A = 0: A_z^M = -FL$

Stab AB:



$\sum F_x = 0: N^{AB} = 0$

$\sum F_y = 0: Q_y^{AB} = F$

$\sum F_z = 0: Q_z^{AB} = 0$

$\sum M_x^A = 0: T^{AB} = -FL$

$\sum M_y^A = 0: M_y^{AB} = 0$

$\sum M_z^A = 0: M_z^{AB} = FL - F x_1$

$0 < x_1 < L$

$x_1 = x$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

6. Stab BC im Punkt B trennen
7. Beanspruchungskräfte am Ende vom Stab AB bestimmen
8. Kräfte umkehren und im Stab BC eintragen
9. Stab BC schneiden und Schnittstelle mit Koordinate x_2 beschreiben
10. Unbekannte Beansprungskräfte in positive Richtung einzeichnen
11. Mit GGB bestimmen

- Alternativ bei anderem Ende vom Stab BC anfangen um Lagerkräfte nicht bestimmen zu müssen.
- Beanspruchungskräfte dann aber in negative Koordinatenrichtung!

Stab BC:

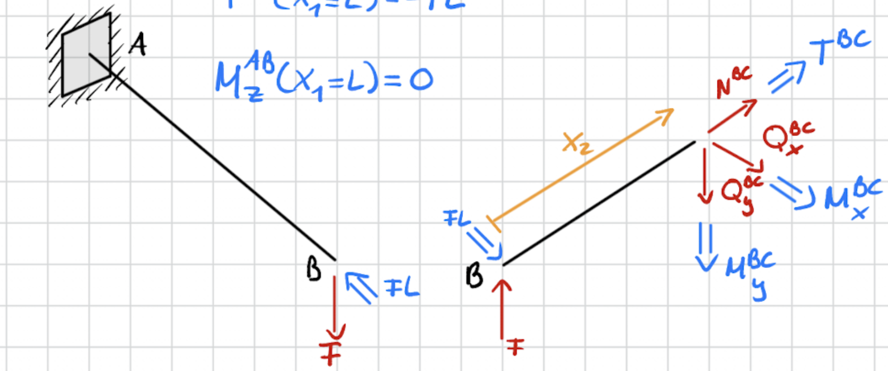
$0 < x_2 < L$

$x_2 = z$

$Q_y^{AB}(x_1 = L) = F$

$T^{AB}(x_1 = L) = -FL$

$M_z^{AB}(x_1 = L) = 0$

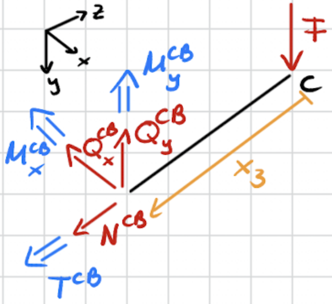


$\sum F_x = 0: \quad Q_x^{BC} = 0 \qquad \sum M_x^B = 0: \quad M_x^{BC} = -FL + F x_2$

$\sum F_y = 0: \quad Q_y^{BC} = F \qquad \sum M_y^B = 0: \quad M_y^{BC} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad N^{BC} = 0 \qquad \sum M_z^B = 0: \quad T^{BC} = 0$

Alternativ von anderer Seite (ohne Lagerkräfte):



$\sum F_x = 0: \quad Q_x^{CB} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad Q_y^{CB} = F$

$\sum F_z = 0: \quad N^{CB} = 0$

$\sum M_x^A = 0: \quad M_x^{CB} = -F x_3$

$\sum M_y^A = 0: \quad M_y^{CB} = 0$

$\sum M_z^A = 0: \quad T^{CB} = 0$

↳ Stab BA dann analog zu oben...

$0 < x_3 < L$

$L - x_3 = z$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 12

Aufgabe 2

a) System statisch bestimmt?

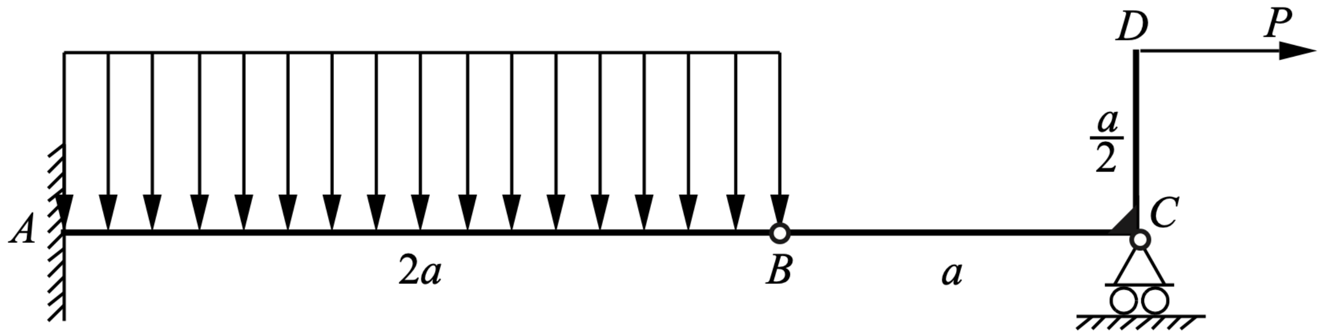
b) Grösstes Biegemoment:
Randwerte und Extremalstellen beachten

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 12

Aufgabe 2

Das skizzierte System, zusammengesetzt aus zwei in B reibungsfrei gelenkig verbundenen Stabträgern (Längen $2a$ und a) ist in A eingespannt und in C reibungsfrei aufgelegt. In C hat der Stabträger BC einen fest mit ihm verbundenen Querarm CD (Länge $^a/_2$). Die Belastung besteht aus einer gleichmässig über AB verteilten Kraft vom Gesamtbetrag $2P$ und einer Kraft vom Betrag P in D.



Bestimmen Sie die Beanspruchung in den Stabträgern AB und BC sowie Ort und Betrag des grössten Biegemomentes.

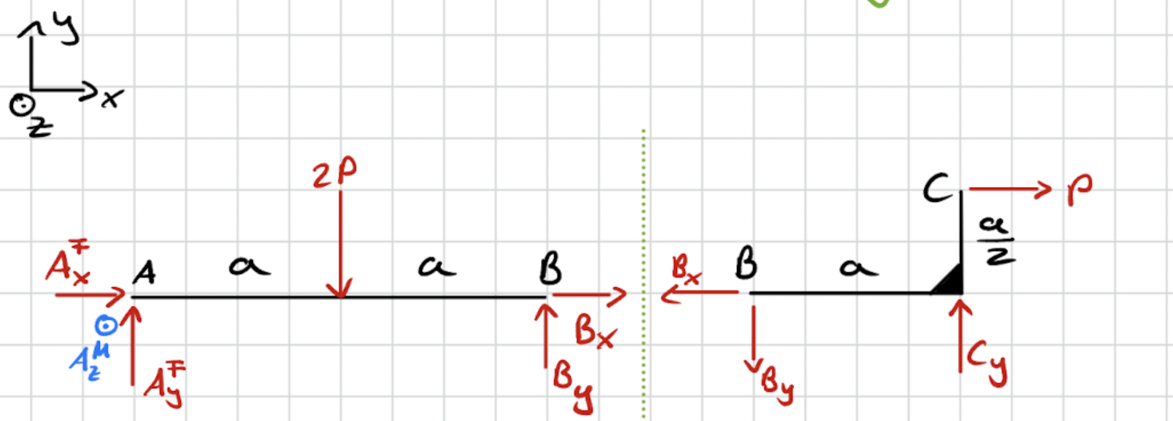
POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. Zu viele Unbekannte -> Systemtrennung in B
2. Linienverteilte Kraft reduzieren
3. Lagerkräfte bestimmen

2. 4 Unbekannte → Systemtrennung in B



$$\sum F_x = 0: \; A_x^F = -B_x$$

$$\sum F_y = 0: \; A_y^F = -B_y + 2P$$

$$\sum M_z^A = 0: \; A_z^M = 2Pa - B_y \cdot 2a$$

$$A_x^F = -P$$

$$A_y^F = \frac{3}{2}P$$

$$A_z^M = Pa$$

$$\sum F_x = 0: \; B_x = P$$

$$\sum F_y = 0: \; B_y = C_y$$

$$\sum M_z^A = 0: \; C_y = \frac{P}{2}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

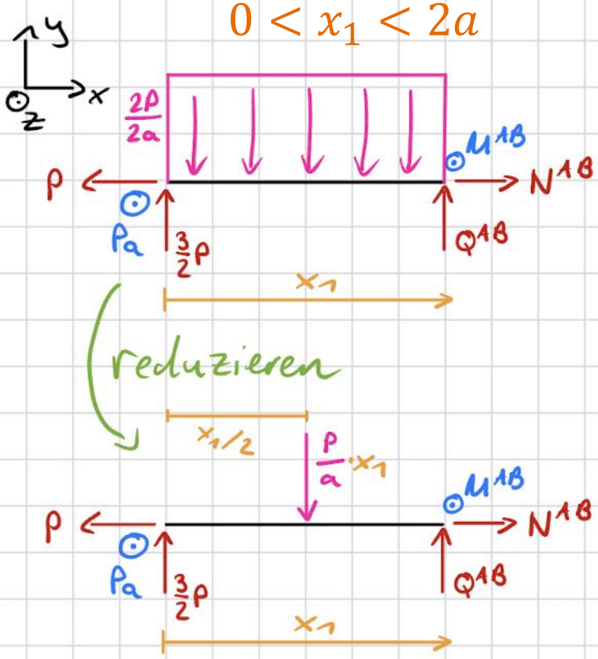
Lösung 2.

4. Stab AB bei Koordinate x_1 schneiden
5. Linenverteilte Kraft erst nach schneiden reduzieren
6. Beanspruchung einzeichnen
7. Mit GGB lösen

8. Beanspruchung am Ende vom Stab BC bestimmen
9. Stab schneiden
10. Beanspruchung mit GGB lösen

Stab AB:

$0 < x_1 < 2a$



$\sum F_x = 0: N^{AB} = P$

$\sum F_y = 0: Q^{AB} = \frac{P}{a} x_1 - \frac{3}{2} P$

$\sum M_z^1 = 0: M^{AB} = -\frac{P}{a} x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + \frac{3}{2} P x_1 - Pa$

$$\boxed{\begin{aligned} N^{AB} &= P \\ Q^{AB} &= P\left(\frac{x_1}{a} - \frac{3}{2}\right) \\ M^{AB} &= P\left(-\frac{x_1^2}{2a} + \frac{3}{2} x_1 - a\right) \end{aligned}}$$

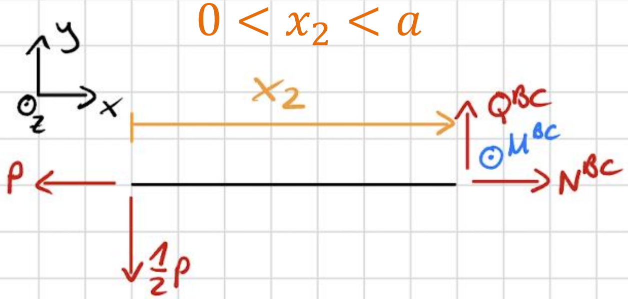
Stab BC:

$0 < x_2 < a$

$N^{AB}(x_1 = 2a) = P$

$Q^{AB}(x_1 = 2a) = \frac{1}{2} P$

$M^{AB}(x_1 = 2a) = 0$



$\sum F_x = 0: N^{BC} = P$

$\sum F_y = 0: Q^{BC} = \frac{1}{2} P$

$\sum M_z^1 = 0: M^{BC} = -\frac{1}{2} P x_2$

$$\boxed{\begin{aligned} N^{BC} &= P \\ Q^{BC} &= \frac{1}{2} P \\ M^{BC} &= -\frac{1}{2} P x_2 \end{aligned}}$$

POLYBOX

Lösung 2.

11. Moment an Endpunkten vom Stab AB bestimmen
12. Lokale Extremalstelle im Stab AB finden
13. Moment an Endpunkten vom Stab BC bestimmen
14. Keine lokale Extremalstelle im Stab BC da Momentenverteilung linear ist
15. Grösster Momentenbetrag identifizieren

Ort und Betrag von max Biegemoment M_{max}

$$M^{AB}(x_1) = P\left(-\frac{x_1^2}{2a} + \frac{3}{2}x_1 - a\right), \quad 0 \leq x_1 \leq 2a$$

$$M^{BC}(x_2) = -\frac{1}{2}Px_2, \quad 0 \leq x_2 \leq a$$

M^{AB}:

Maximalstelle für $0 < x_1 < 2a$ finden:

$$\frac{dM^{AB}}{dx_1} \overset{!}{=} 0 = P\left(-\frac{x_1}{a} + \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{x_1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}a$$

$$M^{AB}\left(\frac{3}{2}a\right) = P\left(-\frac{9}{8}a + \frac{9}{4}a - a\right) = \frac{1}{8}Pa$$

M^{AB} an Randpunkten berechnen:

$$M^{AB}(0) = -Pa$$

$$M^{AB}(2a) = P\left(-\frac{4a^2}{2a} + 3a - a\right) = 0$$

M^{BC}

M^{BC} Nur an Randpunkten bestimmen da linear:

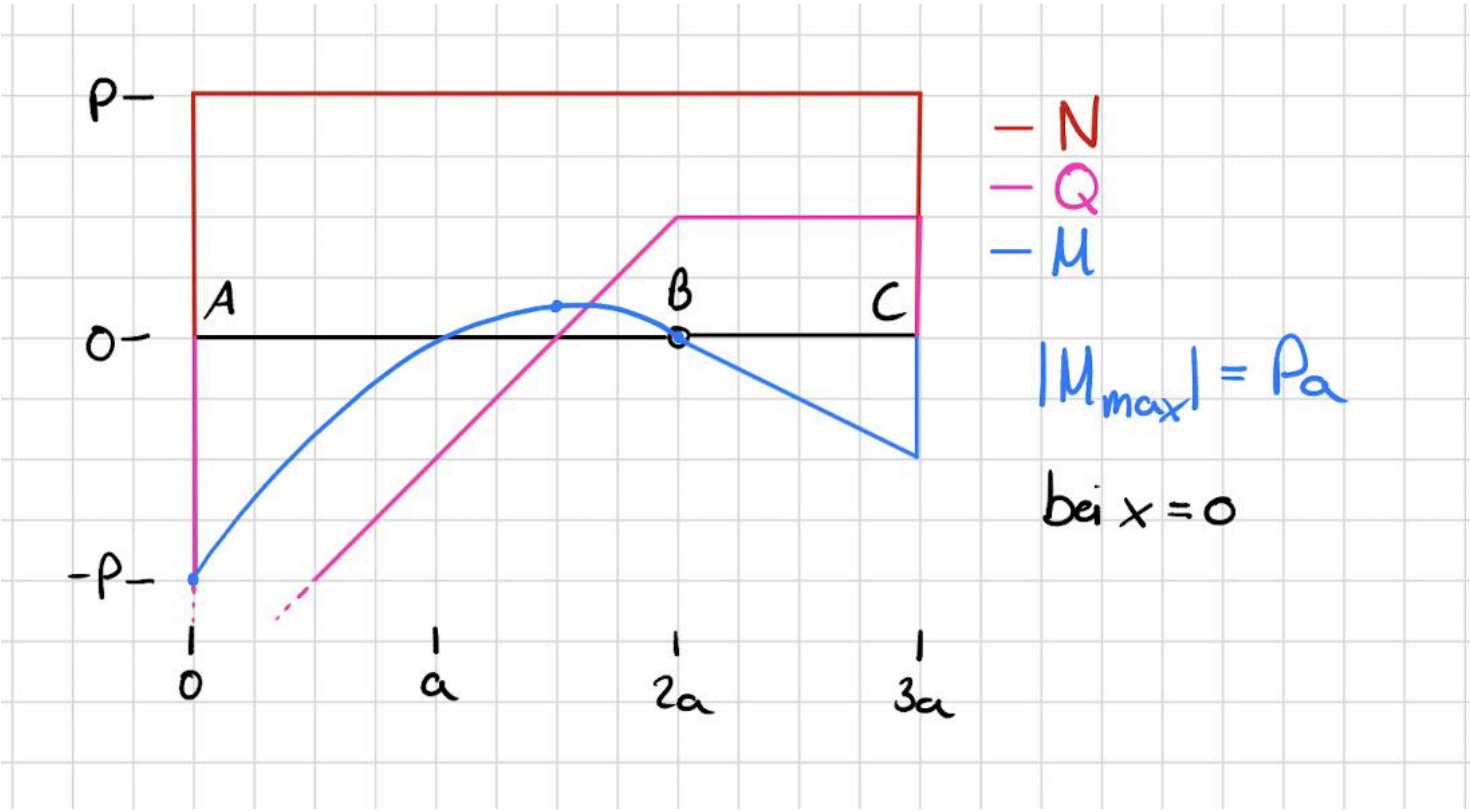
$$M^{BC}(0) = 0$$

$$M^{BC}(a) = -\frac{1}{2}Pa$$

POLYBOX

Lösung 2.

POLYBOX



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 12

Aufgabe 3

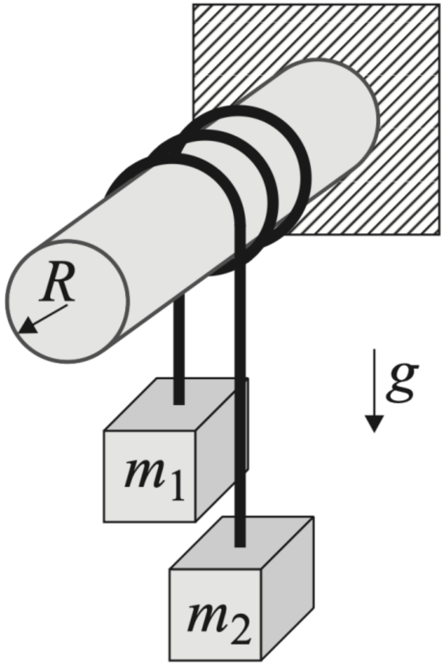
Fallunterscheidung:

1) $\mathrm{m}_1 < \mathrm{m}_2$
2) $\mathrm{m}_1 > \mathrm{m}_2$

Schnellübung 12

Aufgabe 3

Ein massenloses Seil ist um einen starren Rundstab (Radius R) gewickelt ($2^1/_2$ Umdrehungen). Zwischen Seil und Stab wirkt der Haftreibungskoeffizient μ.
Angenommen m_1 sei bekannt, bestimmen Sie die Bedingungen für m_2, damit das System in Ruhe bleibt.



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

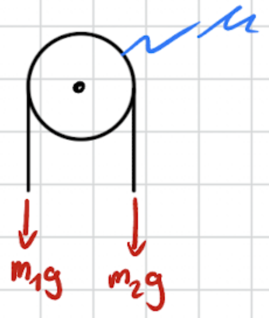
1. Fallunterscheidung für $m_1 > m_2$ und $m_1 < m_2$
2. Exponentialterm mit kleinerer Kraft multiplizieren
3. Beide Fälle für m_2 auflösen

3. wenn $m_1 > m_2$:

$$m_1 \cancel{g} < m_2 \cancel{g} \cdot e^{\mu\alpha} \Rightarrow m_2 > m_1 e^{-\mu\alpha}$$

wenn $m_2 > m_1$:

$$m_2 \cancel{g} < m_1 \cancel{g} e^{\mu\alpha} \Rightarrow m_2 < m_1 e^{\mu\alpha}$$



$\alpha = 5\pi$ (2.5 Umwicklungen)

$$\underline{\underline{m_1 e^{-5\mu\pi} < m_2 < m_1 e^{5\mu\pi}}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme