POLYBOX

Schnellübung 13

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

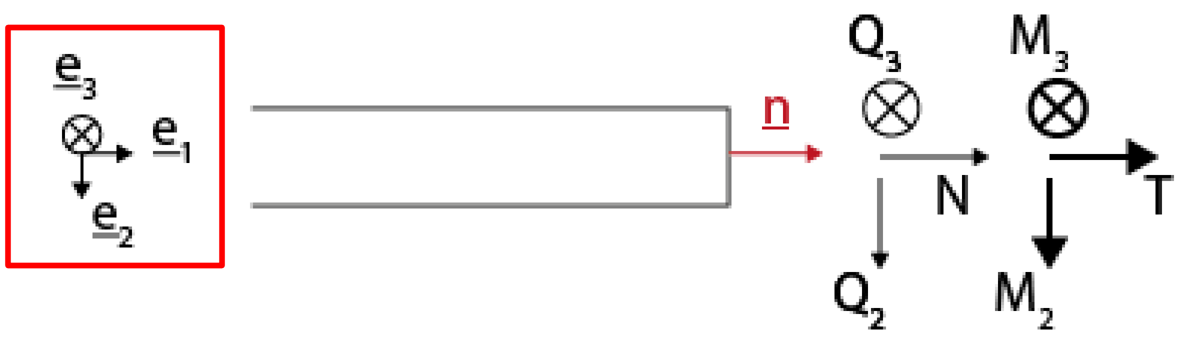
HS 2025

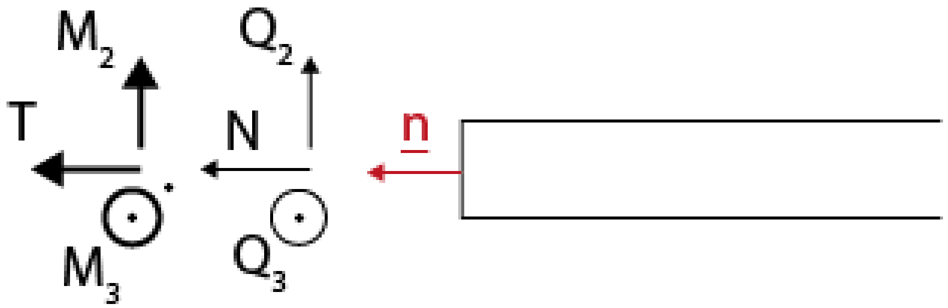
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 13

WH: Konvention Beanspruchung

- Wichtig für Differentialbeziehungen!





Einführung Schnellübung 13

Differentialbeziehungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} &= -q_y(x) \\ \frac{dM_z}{dx} &= -Q_y(x) \end{aligned}}$$

Wir arbeiten vorwiegend mit dieser Form

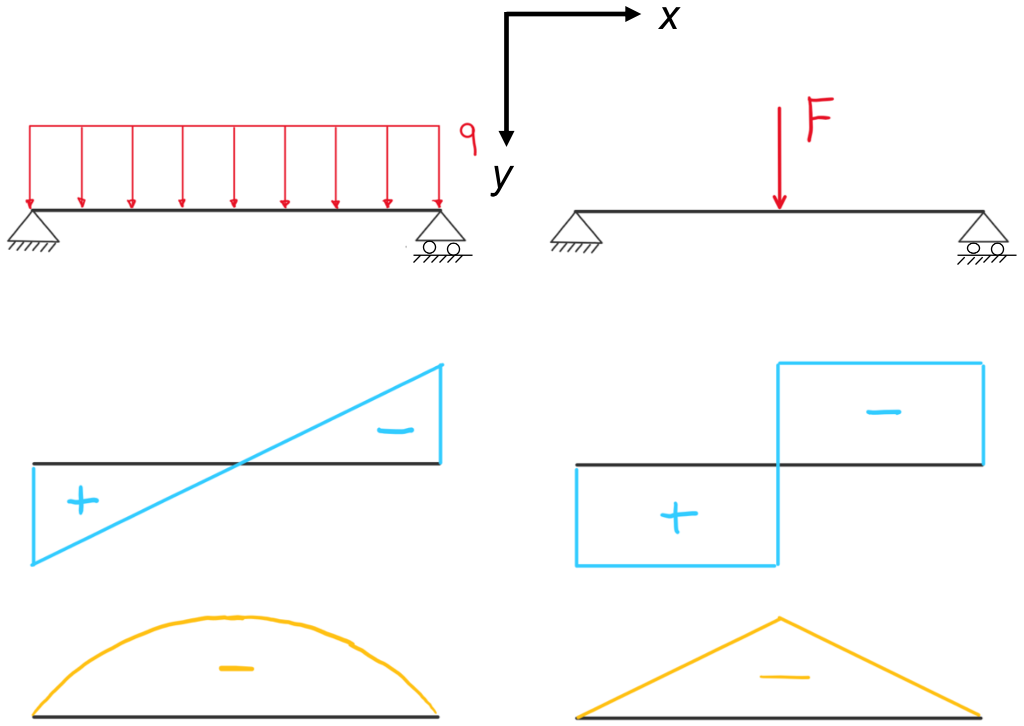
$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z(x)$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 13

Anwendung Differentialbeziehungen an zwei Beispielen



q(x):

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y(x)$$

$$Q_y = -\int q_y(x)\,dx + C_1$$

Q(x):

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y(x)$$

$$M_z = -\int Q_y(x)\,dx + C_2$$

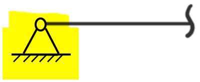
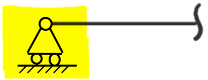
M(x):

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 13

Randbedingungen

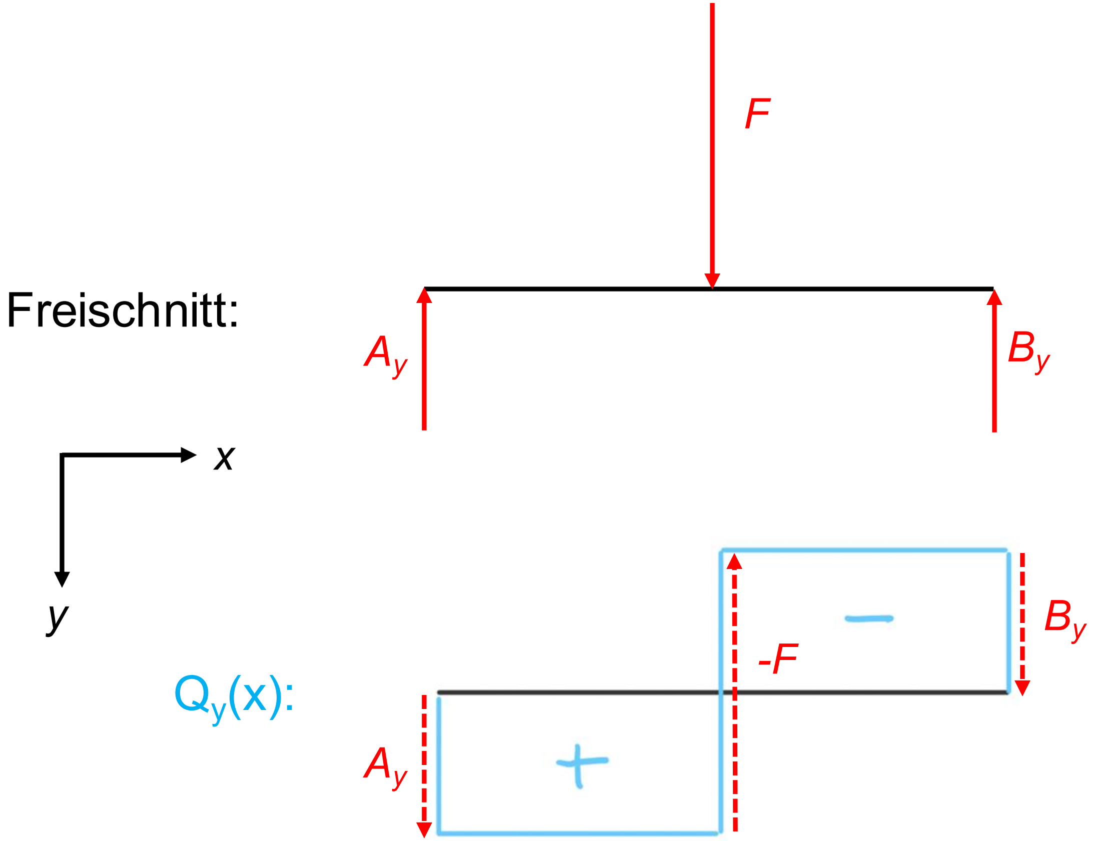
- Die unbekannte Integrationskonstante C kann durch Randbedingungen bestimmt werden.

		N	Q	M
Gelenk		$N \neq 0$	$Q \neq 0$	$M=0$
Auflager		$N=0$	$Q \neq 0$	$M=0$
Einspannung		$N \neq 0$	$Q \neq 0$	$M \neq 0$
Freies Ende		$N=0$	$Q=0$	$M=0$

Einführung Schnellübung 13

Einzelkraft oder Kräftepaar

- Falls Einzelkräfte am Stabträger angreifen springt die Querkraft dort um deren Betrag in die andere Richtung
- Das Gleiche gilt für ein Kräftepaar



Einführung Schnellübung 13

Vorgehen Differentialbeziehungen

1. Diskontinuierliche Stellen identifizieren (Einzelkräfte, Einzelmomente, Anfang/Ende von verteilten Kräften)
2. Stabträger in **Abschnitte** zwischen diesen Stellen einteilen, Laufvariable und Schnittgrössen einführen. Für jeden Abschnitt q(x) bestimmen (Falls keine verteilte Kraft angreift: q(x)=0)
3. Für jeden Abschnitt Differentialbeziehungen aufstellen und integrieren (+C!)
4. Für jeden Abschnitt je eine **Randbedingung** für $Q_y(x)$ und $M_z(x)$ aufstellen
5. Mit den Randbedingungen die unbekannten Integrationskonstanten bestimmen

   - Zuerst Lagerkräfte und –momente bestimmen

   - Aufpassen: Vorzeichen Lagerkraft vs. Vorzeichen Beanspruchungskomponente

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 13

Aufgabe 1

Randbedingungen herausfinden

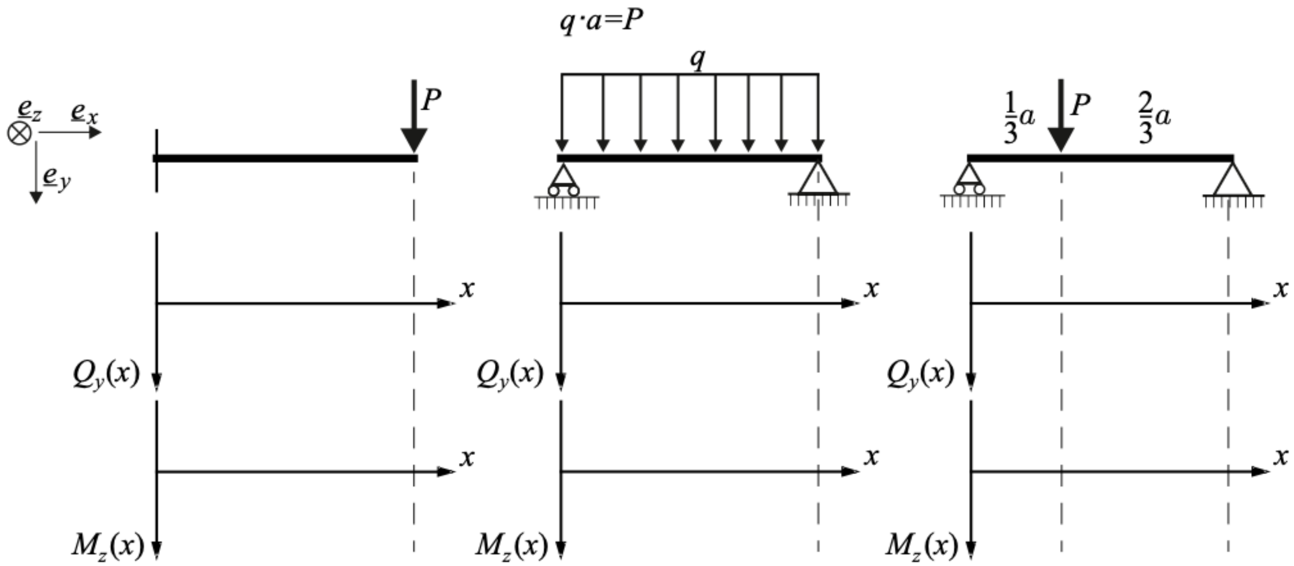
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 12

POLYBOX

Aufgabe 1

Zeichnen Sie für die folgenden drei Lagerungsarten eines Balkenträgers mit Länge a den Querkraft- und den Biegemomentenverlauf: *Hinweis: Verwenden Sie die Differentialbeziehungen.*

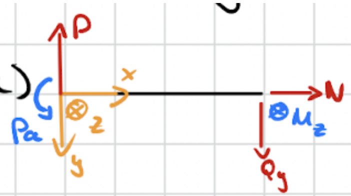


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Stab schneiden
3. Linienverteilte Kraft und Randbedingungen bestimmen
4. Mit Differenzialbedingungen Q_y, M_z finden
5. Mit Randbedingungen Konstanten finden

1. a)



betrachten diese Seite nur für Lagerkräfte

$q_y(x) = 0$

Randbedingungen:

$Q_y(0) = P \leftarrow \sum F_y = 0$ an Einspannung

$M_z(a) = 0 \leftarrow$ Freies Stabende ohne Moment

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y(x)$$

$$\hookrightarrow Q_y = -\int q_y(x)\,dx = -\int 0\,dx = C_1$$

$$Q_y(0) = P \Rightarrow C_1 = P$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y(x)$$

$$\hookrightarrow M_z = -\int Q_y(x)\,dx = -\int C_1\,dx = -C_1 x + C_2$$

$$M_z(a) = -C_1 a + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 a = Pa$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_y &= P \\ M_z &= P(a-x) \\ N &= 0 \end{aligned}} \quad 0 < x < a$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Stab schneiden
3. Linienverteilte Kraft und Randbedingungen bestimmen
4. Mit Differenzialbedingungen Q_y, M_z finden
5. Mit Randbedingungen Konstanten finden

POLYBOX

b)

$q_y(x) = \frac{p}{a}$

Randbedingungen:

$Q_y(0) = \frac{p}{2} \leftarrow \Sigma F_y = 0$: an Lager

$M_z(0) = 0 \leftarrow$ Auflager

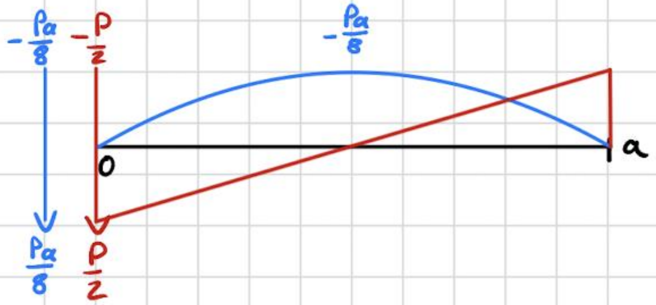
$$Q_y = -\int q_y(x)\,dx = -\frac{p}{a}x + C_1$$

$$M_z = -\int Q_y(x)\,dx = \frac{p}{2a}x^2 - C_1 x + C_2$$

$$Q_y(0) = C_1 = \frac{p}{a} \Rightarrow C_1 = \frac{p}{2}$$

$$M_z(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_y &= P\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) \\ M_z &= \frac{P}{2}\left(\frac{x^2}{a} - x\right) \\ N &= 0 \end{aligned}} \quad 0 < x < a$$

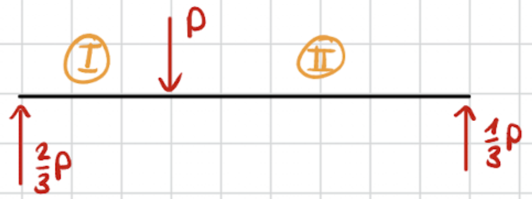


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Stab in zwei Abschnitte unterteilen
3. Beanspruchung in Abschnitt 1 mit Differenzialbedingungen bestimmen

c)



Kraft mitten im Stab → in zwei Abschnitte teilen!

Abschnitt I:

$q_y(x) = 0$

Randbedingungen:

$Q_y(0) = \frac{2}{3}P$

$M_z(0) = 0$

$$Q_y = -\int q_y\,dx = C_1$$

$$M_z = -\int Q_y\,dx = -C_1 x + C_2$$

$$Q_y(0) = C_1 = \frac{2}{3}P \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}P$$

$$M_z(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_y(x) &= \frac{2}{3}P \\ M_z(x) &= -\frac{2}{3}Px \\ N &= 0 \end{aligned}} \quad 0 < x < \frac{1}{3}a$$

POLYBOX

IMES

Institute for Mechanical Systems

Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

4. Beanspruchung im Abschnitt 2 bestimmen

$$\boxed{\begin{aligned} Q_y(x) &= \frac{2}{3}P \\ M_z(x) &= -\frac{2}{3}P \\ N &= 0 \end{aligned}} \quad 0<x<\frac{1}{3}a$$

Abschnitt II:

$q_y(x) = 0$

Randbedingungen:

$Q_y(a) = -\frac{1}{3}P$

$M_z(a) = 0$

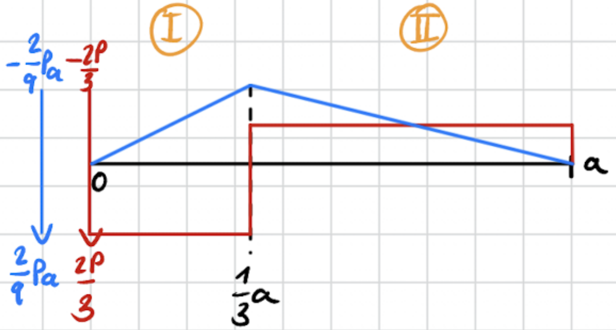
$$Q_y = -\int q_y(x)\,dx = C_3$$

$$M_z = -\int Q_y\,dx = -C_3 x + C_4$$

$$Q_y(a) = C_3 = -\frac{1}{3}P \Rightarrow \quad C_3 = -\frac{1}{3}P$$

$$M_z(a) = -C_3 a + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = C_3 a = -\frac{1}{3}Pa$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_y(x) &= -\frac{1}{3}P \\ M_z(x) &= \frac{P}{3}(x-a) \\ N &= 0 \end{aligned}} \quad \frac{1}{3}a<x<a$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 13

Aufgabe 2

Laufvariablen günstig einführen

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 12

POLYBOX

Alte Prüfungsaufgabe!

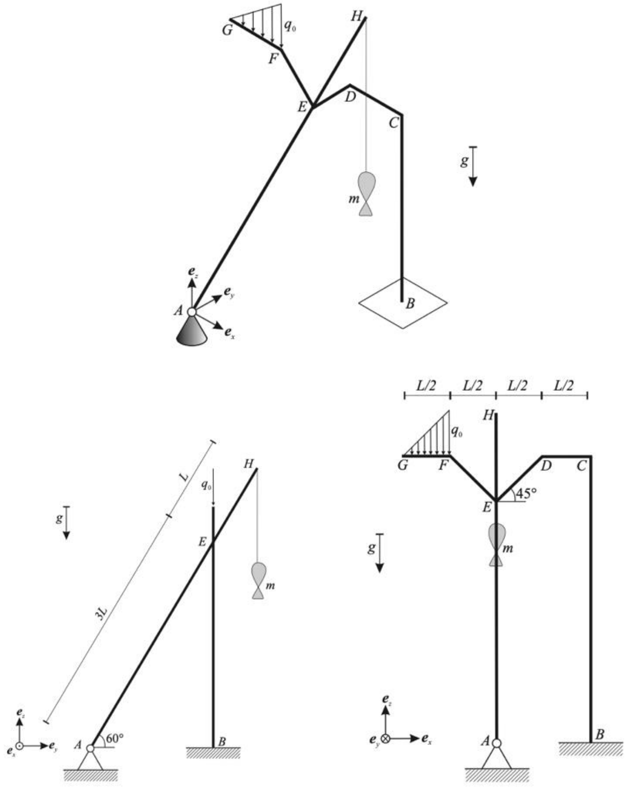
Aufgabe 2

Das auf der nächsten Seite abgebildete 3D System besteht aus einer masselosen Angelrute A
(Länge $4L$) und einem masselosen Geländer $BCDEFG$ (Geometrie siehe Skizzen). Die Angelru
ist im Punkt A mit einem reibungsfreien Kugellager drehbar am Boden befestigt und im Pun
E reibungsfrei am Geländer aufgelegt. Ein Fisch mit Masse m hängt an einem Seil, welches
Punkt H befestigt ist. Das Geländer ist im Punkt B im Boden eingespannt. Im Balkenteil
des Geländers wirkt zusätzlich eine dreieckig linienverteilte Kraft mit Maximalbetrag q_0. D
System befindet sich in einer Ruhelage.

a) Trennen Sie das System in die zwei Balken AEH und $BCDEFG$ auf. Führen Sie dabei jedem Teilsystem die entsprechende Kontaktkraft im Punkt E, sowie die Lagerkräfte u -momente in den Punkten A und B ein.

b) Bestimmen Sie die Lagerkräfte und -momente im Punkt B.

c) Bestimmen Sie die Beanspruchung des Geländers in den Abschnitten BC und GF.

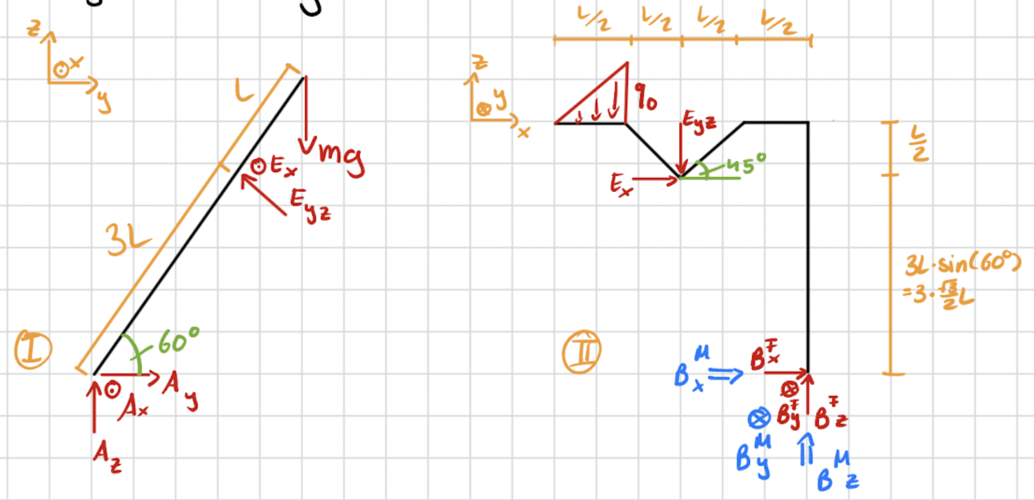


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. System in E trennen
2. Lagerkräfte in A im System I bestimmen (eigentlich gar nicht nötig)

2. Systemtrennung im Punkt E:



System I:

Lagerkräfte in A bestimmen:

$\sum F_x = 0: \quad A_x = -E_x$

$\sum F_y = 0: \quad A_y = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{yz}$

$\sum F_z = 0: \quad A_z = mg - \frac{1}{2} E_{yz}$

$\sum M_x^A = 0: \quad 3L E_{yz} = 4L \cdot \frac{1}{2} mg$

$\sum M_y^A = 0: \quad E_x = 0$

$\sum M_z^A = 0: \quad E_x = 0$

Projektion

Hebelarm

$E_x = 0$

$E_{yz} = \frac{2}{3} mg$

$A_x = 0$

$A_y = \frac{\sqrt{3}}{3} mg$

$A_z = \frac{2}{3} mg$

POLYBOX

Lösung 2.

3. Lagerkräfte in A im System II bestimmen

$E_x = 0$
$E_{yz} = \frac{2}{3} mg$

System II:

Lagerkräfte in B bestimmen:

$\sum F_x = 0: \quad B_x^F = 0$

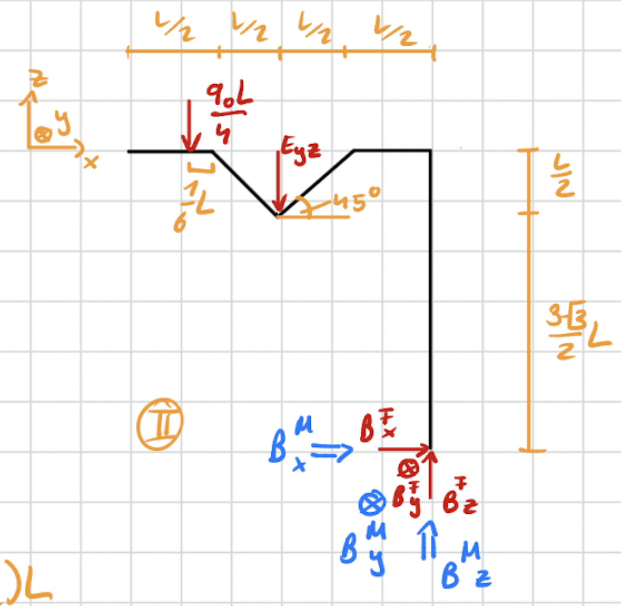
$\sum F_y = 0: \quad B_y^F = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_{yz}$

$\sum F_z = 0: \quad B_z^F = \frac{1}{2} E_{yz} + \frac{q_0 L}{4}$

$\sum M_x^B = 0: \quad B_x^M = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{yz} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} L$

$\sum M_y^B = 0: \quad B_y^M = \frac{1}{2} E_{yz} \cdot L + \frac{q_0 L}{4} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right) L$

$\sum M_z^B = 0: \quad B_z^M = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{yz} L$



$B_x^F = 0$

$B_y^F = -\frac{\sqrt{3}}{3} mg$

$B_z^F = \frac{1}{3} mg + \frac{q_0 L}{4}$

$B_x^M = \frac{3}{2} mgL$

$B_y^M = \frac{1}{3} mgL + \frac{5}{12} q_0 L^2$

$B_z^M = \frac{\sqrt{3}}{3} mgL$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. Beanspruchung im Stab BC mit GGB bestimmen

$B_x^F = 0$

$B_y^F = -\frac{\sqrt{3}}{3} mg$

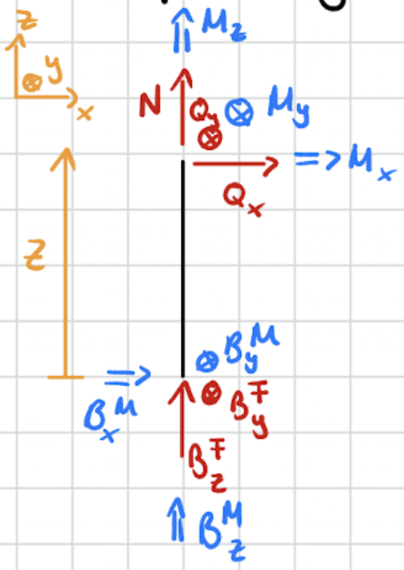
$B_z^F = \frac{1}{3} mg + \frac{q_0 L}{4}$

$B_x^M = \frac{3}{2} mgL$

$B_y^M = \frac{1}{3} mgL + \frac{5}{12} q_0 L^2$

$B_z^M = \frac{\sqrt{3}}{3} mgL$

Beanspruchung im Stab BC:



$\sum F_x = 0: \quad Q_x = 0$

$\sum F_y = 0: \quad Q_y = -B_y^F$

$\sum F_z = 0: \quad N = -B_z^F$

$\sum M_x^B = 0: \quad M_x = -B_x^M - B_y^F z$

$\sum M_y^B = 0: \quad M_y = -B_y^M$

$\sum M_z^B = 0: \quad T = -B_z^M$

$N = -\frac{1}{3} mg - \frac{q_0 L}{4}$

$T = -\frac{\sqrt{3}}{3} mgL$

$Q_y = \frac{\sqrt{3}}{3} mg$

$M_y = -\frac{1}{3} mgL - \frac{5}{12} q_0 L^2$

$Q_x = 0$

$M_x = -\frac{3}{2} mgL + \frac{\sqrt{3}}{3} mg z$

$0 < z < (1 + 3\sqrt{3}) \frac{L}{2}$

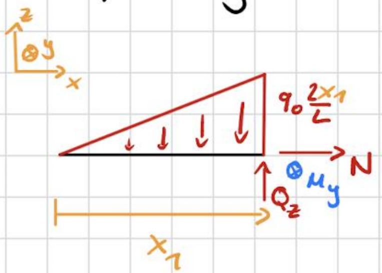
POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. Beanspruchung im Stab GF mit Differenzialbedingungen bestimmen

Beanspruchung im Stab GF:



$$q_z(x_1) = q_0 \frac{2x_1}{L}$$

$Q_z(0) = 0$ Freies Stabende
$M_y(0) = 0$

$$\frac{dQ_z}{dx_1} = -q_z(x_1)$$

$$\hookrightarrow Q_z = -\int q_z(x_1)\,dx_1 = \frac{q_0 x_1^2}{L} + C_1$$

kein Minuszeichen!

$$\frac{dM_y}{dx_1} = Q_z(x_1)$$

$$\hookrightarrow M_y = \int Q_z(x_1)\,dx_1 = \frac{q_0 x_1^3}{3L} + C_1 x_1 + C_2$$

$$Q_z(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$M_y(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$x_1 = x + L$ mit globalem Ursprung in A

$N = 0$

$Q_z(x) = \frac{q_0}{L}(x+L)^2 \quad \Big| \quad -L < x < -\frac{L}{2}$

$M_y(x) = \frac{q_0}{3L}(x+L)^3$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 13

Aufgabe 1

- Zuerst Lagerkräfte bestimmen

Aufgabe 2

- Linke und rechte Lagerkraft A respektive B als gegeben annehmen
- Randbedingungen beachten
- Beanspruchung: Unterteilung in einzelne Abschnitte beachten

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme