POLYBOX

Schnellübung 1

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

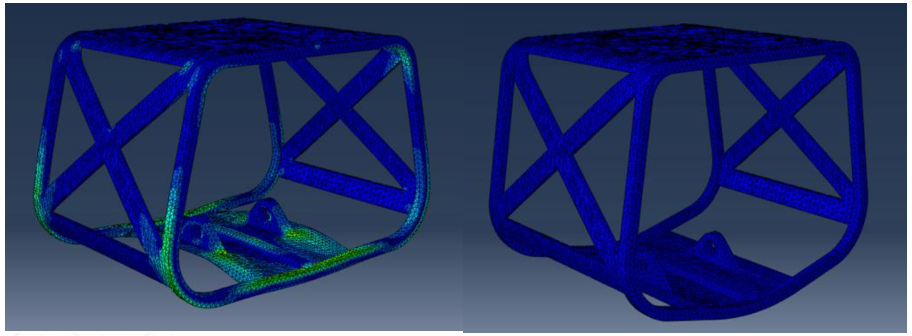
HS 2025

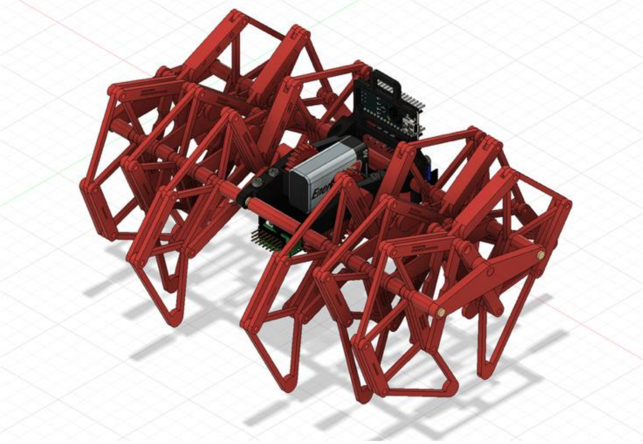
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

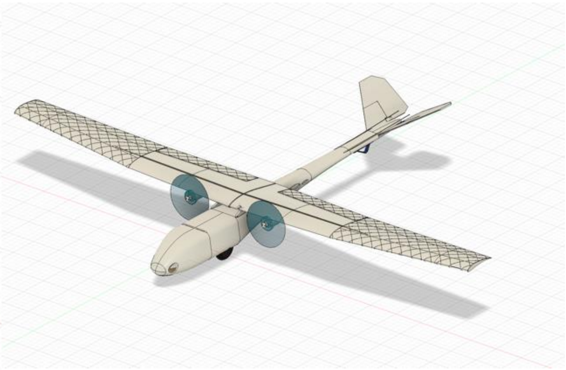
POLYBOX

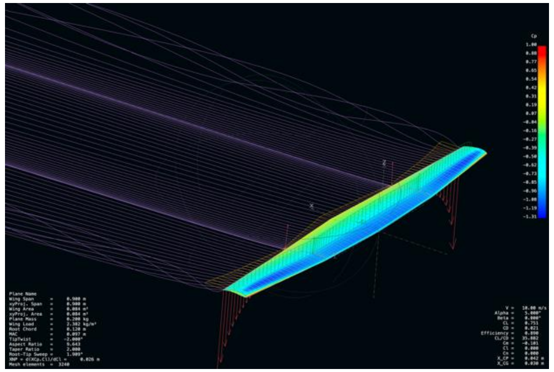
Über mich

- Mark Fischer
- 5. Semester Bsc Maschinenbau
- Fokus: Design, Mechanics & Manufacturing
- Hobbies: Projekte









IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Ablauf Schnellübung / Infos / Tipps

POLYBOX

- Studycenter und Mittagspräsenz ab 3. Woche
- Studycenter: Mittwoch 18:15-20:00 ETA F5
- Mittagspräsenz: 12:15-13:00
  - Dienstag ML F 40
  - Donnerstag ML J 34.1
- Schnellübung während Übungsstunde
- Hausübung nacher Zuhause
- Nur kurzer Theorieteil -> Vorlesung besuchen!
- Arbeitet mit ZF
- Sehr intuitives Fach
- Nicht zu sehr einschüchtern lassen
- Fragt einfach! Es gibt keine schlechten Fragen

5 min	Theorie Recap
35-45 min	Gruppenarbeit
10 min	Besprechung Gruppenarbeit
20-30 min	Eigenständiges lösen
10 min	Besprechung Aufgaben / Fragen

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 1

POLYBOX

Koordinaten und Transformationen

- Ein geometrischer Punkt kann mithilfe von drei Koordinaten eindeutig bestimmt werden (siehe Bilder im Buch)
- Wenn man die Koordinaten eines Punktes für eines der Koordinatensysteme kennt, kann man mittels Umrechnung die Koordinaten der anderen Koordinatensystemen berechnen

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho\cos\varphi$	$r\sin\theta\cos\psi$
y	y	$\rho\sin\varphi$	$r\sin\theta\sin\psi$
z	z	z	$r\cos\theta$
ρ	$\sqrt{x^2+y^2}$	ρ	$r\sin\theta$
φ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r\cos\theta$
r	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	r
θ	$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\arctan\frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ

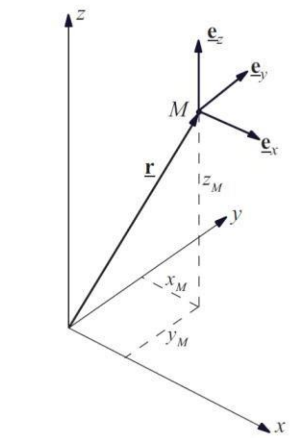
Ausschnitt aus der Zusammenfassung

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

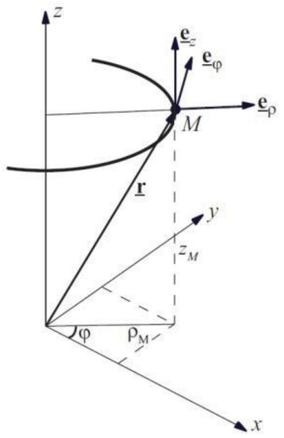
Einführung Schnellübung 1

Koordinaten und Ortsvektor

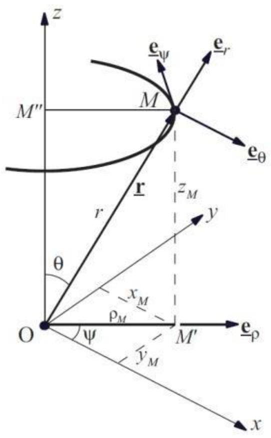
- Ein Ortsvektor, welcher abhängig von der Zeit t an unterschiedliche Punkte im Raum zeigt, beschreibt die Bewegung eines Punktes durch den Raum
- Die Richtungen der zylindrischen und sphärischen Basisvektoren können veränderlich sein, je nach Lage des Punktes
- Verschiedene äquivalente Darstellungen eines Punktes:



Kartesische Koordinaten



Zylindrische Koordinaten



Sphärische Koordinaten

Koordinaten

Kartesisch:

$$\underline{r}(t) = \underbrace{x(t)}\, * \underline{e}_x + \underbrace{\mathrm{y}(t)}\, * \underline{e}_y + \underbrace{z(t)}\, * \underline{e}_z$$

Zylindrisch:

$$\underline{r}(t) = \underbrace{\rho(t)}\, * \underline{e}_\rho(\underbrace{\varphi(t)}) + \underbrace{z(t)}\, * \underline{e}_z$$

Sphärisch:

$$\underline{r}(t) = \underbrace{r(t)}\, * \underline{e}_r(\underbrace{\Theta(t)}, \underbrace{\psi(t)})$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 1

Aufgabe 1

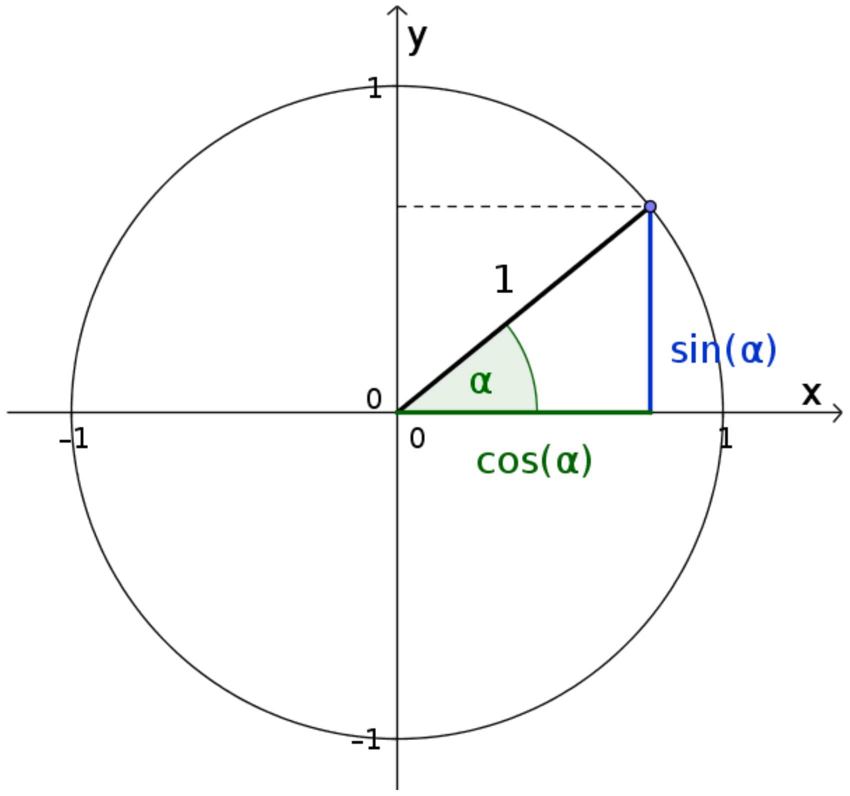
a) In «geschickte» Koordinaten umformen

b) Einheitskreis (siehe Abbildung rechts)
Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$$

$$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

Tipps Schnellübung 1

Aufgabe 1

a) In «geschickte» Koordinaten umformen

b) Einheitskreis (siehe Abbildung rechts)
Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$$

$$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 1

Die Bewegung eines materiellen Punktes M_1 ist in sphärischen Koordinaten wie folgt beschrieben (vgl. Ingenieurmechanik 1, Fig. 1.18)

$$r = R \qquad \theta = \frac{\pi}{4}(1 - \cos(\mu t)) \qquad \Psi = \mu t$$

R und μ können als gegebene Konstanten vorausgesetzt werden.
Die Bewegung eines zweiten materiellen Punktes M_2 ist in kartesischen Koordinaten durch

$$x = R\cos(\mu t) \qquad y = R\sin(\mu t) \qquad z = R\mu t - R\pi$$

gegeben.

a) Bei welchem t und wo trifft M_1 zum ersten Mal auf die Ebene $z = \frac{R}{2}$.

b) Bei welchem Zeitpunkt t und an welchem Ort treffen sich die beiden Punkte.

c) Skizzieren Sie die Ortskurve des Punktes M_2.

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.a)

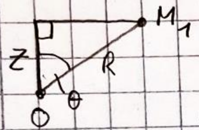
1. z in Spärische Koordinaten umwandeln
2. z und M_1 gleichsetzen
3. μt in M_1 einsetzen

Schnellübung 1

1a)

$$M_1 = \begin{pmatrix} R \\ \frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t)) \\ \mu t \end{pmatrix}_{r\theta\varphi} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_{r\theta\varphi}$$

$$z = \frac{R}{2}$$



$$\cos\theta = \frac{z}{R}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{z}{R}\right)$$

$$\boxed{\arccos(x) = \cos^{-1}(x)} \; !$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} = \theta}$$

$$\theta_1 \overset{!}{=} \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t)) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{4}{3} = 1 - \cos(\mu t)$$

$$\cos(\mu t) = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mu t = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

einsetzen:

$$\boxed{M_1\left(\mu t = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \begin{pmatrix} R \\ \pi/3 \\ \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}}$$

POLYBOX

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Lösung 1.b)

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho\cos\varphi$	$r\sin\theta\cos\psi$
y	y	$\rho\sin\varphi$	$r\sin\theta\sin\psi$
z	z	z	$r\cos\theta$
ρ	$\sqrt{x^2+y^2}$	ρ	$r\sin\theta$
φ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r\cos\theta$
r	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	r
θ	$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\arctan\frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ

1.b)

$$M_1 = \begin{pmatrix} R \\ \frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t)) \\ \mu t \end{pmatrix}_{r\theta\varphi}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} R\cos(\mu t) \\ R\sin(\mu t) \\ R\mu t - R\pi \end{pmatrix}_{xyz}$$

merke:

I $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

II $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

M_2 in sphärische Koordinaten umwandeln:

$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$r_2 = \sqrt{R^2\underbrace{(\cos^2(\mu t)+\sin^2(\mu t))}_{\mathrm{I}} + R^2(\mu t-\pi)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + R^2(\mu t-\pi)^2}$$

$$\boxed{r_2 = R\sqrt{1+(\mu t-\pi)^2}}$$

$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{R^2\overbrace{(\cos^2(\mu t)+\sin^2(\mu t))}^{\mathrm{I}}}}{R(\mu t-\pi)}\right)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}(\mu t-\pi)}\right) = \boxed{\arctan\left(\frac{1}{\mu t-\pi}\right) = \theta_2}$$

POLYBOX

1. M_2 in Spärische Koordinaten umwandeln

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.b)

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho\cos\varphi$	$r\sin\theta\cos\psi$
y	y	$\rho\sin\varphi$	$r\sin\theta\sin\psi$
z	z	z	$r\cos\theta$
ρ	$\sqrt{x^2+y^2}$	ρ	$r\sin\theta$
φ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r\cos\theta$
r	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	r
θ	$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\arctan\frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ

$\psi_2 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$\psi_2 = \arctan\left(\frac{R\sin(\mu t)}{R\cos(\mu t)}\right) \rightarrow \mathrm{II}$$

$$\psi_2 = \arctan(\tan(\mu t))$$

$$\boxed{\psi_2 = \mu t}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} R\sqrt{1+(\mu t-\pi)^2} \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu t-\pi}\right) \\ \mu t \end{pmatrix}_{r\theta\psi}$$

$$M_1 \overset{!}{=} M_2$$

$$r_1 \overset{!}{=} r_2$$

$$R \overset{!}{=} R\sqrt{1+(\mu t-\pi)^2}$$

$$1 = 1+(\mu t-\pi)^2$$

$$\pi = \mu t$$

$$\boxed{t = \frac{\pi}{\mu}}$$

in M_2 einsetzen:

$$\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{xyz}}$$

POLYBOX

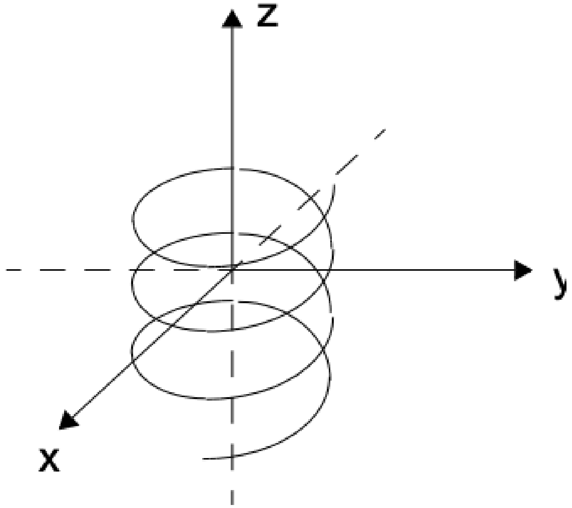
2. r_1 und r_2 gleichsetzen
3. t in M_2 einsetzen

Lösung 1.c)

POLYBOX

Entweder Punkt für versch. t einsetzen oder mit Kreisformel (advanced)

$$M_z = \begin{pmatrix} R\cos(\mu t) \\ R\sin(\mu t) \\ R\mu t + R\pi \end{pmatrix}_{xyz}$$



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 1

POLYBOX

Aufgabe 2

a) 1. Oktant bedeutet $x, y, z \geq 0$
Lösen eines Extremalwertproblems

b) Darstellung einer Ebene in Raum

c) Formel für Verbindungsvektor und die Länge eines Vektors überlegen

Aufgabe 2

Ein Materieller Punkt M hat die Bewegungsgleichung:

$$\underline{r}(t) = (-t^2 + 12t)\underline{e}_x + (t^2 + 12t)\underline{e}_y + t\underline{e}_z \qquad (t \geq 0)$$

a) Bei welcher Zeit t hat M den maximalen Abstand von der y-z-Ebene und befindet sich im ersten Oktanten des Koordinatensystems? Wie gross ist dieser Abstand?

b) Bei welcher Zeit t und wo durchstösst M die Ebene E, welche durch die Ebenengleichung $x + y + z = 50$ gegeben ist?

c) Es sei $\underline{r}_a$ der Ortsvektor des Punktes A (Lösung der Frage a)) und $\underline{r}_b$ der Ortsvektor des Punktes B (Lösung der Frage b)). Berechnen Sie den Verbindungsvektor $\underline{BA}$ sowie den Abstand der zwei Punkte.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.a)

1. x ableiten und $= 0$ setzen für extremstelle
2. $x, y, z > 0$?

2 a)

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 12t \\ t^2 + 12t \\ t \end{pmatrix}_{xyz}$$

grösster Abstand zur y-z-Ebene → Extremstelle von x

$$x = -t^2 + 12t$$

$$\dot{x} \overset{!}{=} 0$$

$$\dot{x} = -2t + 12 \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{t = 6!}$$

ist $\underline{r}(6)$ im 1. Oktanten?

d.h. gilt $x(6) > 0 \wedge y(6) > 0 \wedge z(6) > 0$?

$x(6) = -36 + 72 = 36 > 0$ ✓

$y(6) = 36 + 72 = 108 > 0$ ✓

$z(6) = 6 > 0$ ✓ Im 1. Oktanten!

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 6 \\ \underline{r}(6) = \begin{pmatrix} 36 \\ 108 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.b),c)

1. $r(t)$ in E einsetzen
2. $r(2)$ ausrechnen

b)

$E: x+y+z=50$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^2+12t \\ t^2+12t \\ t \end{pmatrix}$$

$\underline{r}(t)$ in E einsetzen:

$$(-t^2+12t)+(t^2+12t)+t=50$$

$$25t=50$$

$$\boxed{t=2}$$

$$\boxed{\underline{r}(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

c)

$$\underline{r}_a = \underline{r}(6) = \begin{pmatrix} 36 \\ 108 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_b = \underline{r}(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{BA} = \underline{r}_a - \underline{r}_b = \boxed{\begin{pmatrix} 16 \\ 80 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{BA}}$$

$$|\underline{BA}| = \sqrt{16^2+80^2+4^2} = \boxed{81.68 = |\underline{BA}|}$$

1. r_a und r_b aus a) und b)
2. Verbindungsvektor und Länge mit Formeln

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 1

Allgemein:

- Bahnkurven im Raum darstellen

Aufgabe 1

- Bedingungen für einen Punkt beim Eintritt (bzw. Austritt) in den ersten Oktanten

Aufgabe 2

- M_2 in Zylinderkoordinaten umwandeln
- Als erstes nach t auflösen.

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme