POLYBOX

Schnellübung 2

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 2

POLYBOX

Ortsvektor und Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$

Mit kartesischer Basis:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{\underline{r}}(t) \quad \text{oder umgekehrt} \quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int v_x(t)\,dt \\ \int v_y(t)\,dt \\ \int v_z(t)\,dt \end{pmatrix} = \int \underline{v}\,(t) dt$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 2

POLYBOX

Ortsvektor und Geschwindigkeit

	Ortsvektor	Geschwindigkeit
Kartesisch	$\underline{\mathbf{r}} = x\underline{\mathbf{e}}_x + y\underline{\mathbf{e}}_y + z\underline{\mathbf{e}}_z$	$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{x}\underline{\mathbf{e}}_x + \dot{y}\underline{\mathbf{e}}_y + \dot{z}\underline{\mathbf{e}}_z$
Zylindrisch	$\underline{\mathbf{r}} = \rho\underline{\mathbf{e}}_\rho + z\underline{\mathbf{e}}_z$	$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{\rho}\underline{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z}\underline{\mathbf{e}}_z$
Sphärisch	$\underline{\mathbf{r}} = r\underline{\mathbf{e}}_r$	$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{r}\underline{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\underline{\mathbf{e}}_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\underline{\mathbf{e}}_\phi$

Versuchen Sie die Umrechnungen zu verifizieren, indem sie die Transformation selbst nachrechnen (siehe Schnellübung 2)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 2

POLYBOX

Schnelligkeit

Achtung: Unterschied Schnelligkeit (Skalar) und Geschwindigkeit (Vektor)

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}|$

Schnelligkeit $\dot{s}$ als Betrag des Vektors $\underline{v}$ in kartesischen Koordinaten $\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$ ist:

$$\dot{s}(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

-> Wie bestimmt man die Schnelligkeit für zylindrische und sphärische Basis?

Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 2

POLYBOX

Aufgabe 1

a) Unterschied zwischen geometrischem und materiellem Punkt
Gesucht: $\underline{v}_P = v_{Px} \cdot \underline{e}_x + v_{Py} \cdot \underline{e}_y$

b) -

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 2

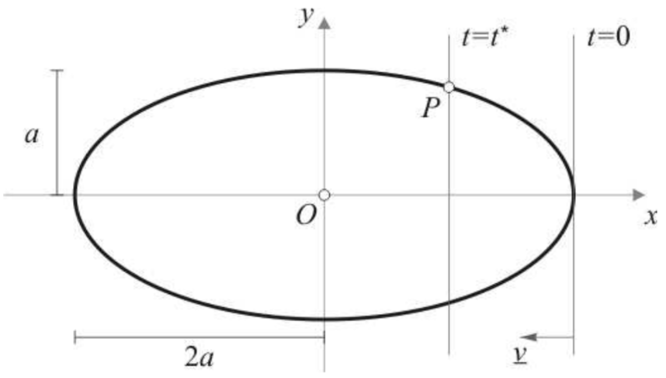
Aufgabe 1

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Eine Parallele zur y-Achse bewegt sich ausgehend von der Lage $x = 2a$ mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = -v_0 \sin\left(\frac{v_o t}{2a}\right) \underline{e}_x$.

a) Betrachte den Punkt P als Schnittpunkt der Gerade mit der Ellipse. Welche Geschwindigkeit hat der entsprechende materielle Punkt der Ellipse? Welche Geschwindkeitkeit hat der entsprechende materielle Punkt der Gerade? Mit welcher Geschwindigkeit verändert sich die Lage des Schnittpunktes P der Gerade mit der Ellipse?

b) Bei welchen geometrischen Schnittpunkten P ist:

- die x-Komponente der Geschwindigkeit gleich 0?
- die y-Komponente der Geschwindigkeit gleich 0?



Lösung 1.a)

1. Geschwindigkeiten der Ellipse und Geraden

1. Bewegungsgleichung der Geraden durch integrieren + Anfangsbedingung finden

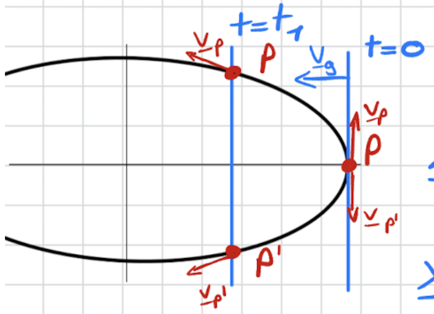
Schnellübung 2

1a) Materieller Punkt → Punkt eines Körpers

↳ $\underline{v}_{ellipse} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{v}_{p,ellipse} = 0$

↳ $\underline{v}_{gerade} = -v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\underline{e}_x \rightarrow \underline{v}_{p,gerade} = -v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\underline{e}_x$

Geschw. Schnittpunkt P:



$$\underline{v}_g = -v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\underline{e}_x$$

anfangsbedingung

$$\underline{x}_g = \int \underline{v}_g \, dt \,, \quad \boxed{\underline{x}_g(t=0) = 2a}$$

$$\underline{x}_g = \int -v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\underline{e}_x \, dt$$

$$\underline{x}_g = \left(\cancel{v_0}\frac{2a}{\cancel{v_0}}\cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) + c\right)\underline{e}_x$$

$$\underline{x}_g = \left(2a\cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) + c\right)\underline{e}_x$$

$$\underline{x}_g(t=0) \overset{!}{=} 2a\,\underline{e}_x = \left(2a\underbrace{\cos\left(\frac{v_0 \cdot 0}{2a}\right)}_{\rightarrow 1} + c\right)\underline{e}_x$$

↳ $c = 0$

$$\underline{x}_g = 2a\cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\underline{e}_x \,,$$ Bewegungsgleichung der Geraden

POLYBOX

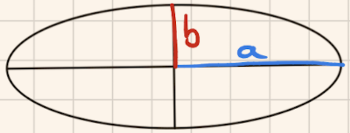
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.a)

2. $\vec{x_g}$ in Ellipsengleichung einsetzen

P läuft auf der Ellipse, also erfüllt er die Ellipsengleichung:

$$\boxed{\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \xrightarrow{\text{allg. Form}} \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



x_g in Ellipsengleichung einsetzen:

$$y^2 = a^2\left(1 - \frac{x^2}{4a^2}\right)$$

$$y = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}$$

$$y = a\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}\left(2a\cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)\right)^2}$$

$$y = a\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\pm \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.a)

POLYBOX

3. Gefundene y-Gleichung mit $\overrightarrow{x_g}$ summiert in $\overrightarrow{x_p}$ einsetzen
4. x_P Ableiten

$$y = \pm a \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right)$$

$$\underline{x}_p = \underline{x}_g \pm a \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \underline{e}_y$$

$$\underline{x}_p = 2a \cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \underline{e}_x \pm a \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \underline{e}_y$$

$$\underline{v}_p = \dot{\underline{x}}_p = -v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \underline{e}_x \pm \frac{v_0}{2} \cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \underline{e}_y$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.b)

POLYBOX

1. x-Komponente von $(\overrightarrow{x_p})'$ gleich 0 setzen
2. Gefundenes t in $\overrightarrow{x_p}$ einsetzen
3. Gleiches für y-Komponente

1b) x-Komponente:

$$-v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$t = \frac{2a}{v_0}\pi \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\underline{x}_p(t=0) = \pm 2a\,\underline{e}_x + 0\,\underline{e}_y$$

y-Komponente:

$$\frac{v_0}{2}\cos\left(\frac{v_0 t}{2a}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$t = \frac{2a}{v_0}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\underline{x}_p\left(t = \frac{a}{v_0}\pi\right) = 0\,\underline{e}_x \pm a\,\underline{e}_y$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 2

POLYBOX

Aufgabe 2

a) Herleitung der Geschwindigkeit in zylindrischer Basis (siehe Tabelle zur Verifizierung)
Achtung: Ableitung von $\underline{e}_{\varphi}$ mit Hilfe kartesischer Basisvektoren

b) Siehe erhaltene Formel in a)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 2

POLYBOX

Aufgabe 2

Die Lage eines materiellen Punktes in Zylinderkoordinaten ist gegeben als

$$\underline{r} = \rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z$$

a) Geben Sie die Komponenten v_ρ, v_φ, v_z der Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten an.

b) Die Bewegung eines materiellen Punktes M verläuft auf einer Schraubenlinie mit

$$\rho = R \qquad z = R\varphi \tan(\alpha) \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}\sin(\omega t)$$

R, α und ω sind Konstanten. Berechnen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2

1. Gegebene Funktionen einsetzen und Ableiten

2a) $\underline{r} = \rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z$

$\underline{v} = \underline{\dot{r}} = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z$

↳ aus ZF, Herleitung in Theorie-Notizen

↳ $v_\rho = \dot{\rho}$

$v_\varphi = \rho \dot{\varphi}$

$v_z = \dot{z}$

2b) $v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(R) = 0$

$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = R \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right) = R \frac{\pi}{2} \omega \cos(\omega t)$

$v_z = \dot{z} = \frac{d}{dt}\left(R \tan\alpha \frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right) = R \frac{\pi}{2} \omega \tan\alpha \cos(\omega t)$

$$\underline{\underline{\underline{v} = R\omega \frac{\pi}{2} \cos(\omega t)(\underline{e}_\varphi + \tan\alpha \, \underline{e}_z)}}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 2

POLYBOX

Aufgabe 1

Alle Informationen sauber aufschreiben und folgende Punkte beachten

- Anfangsbedingungen aufschreiben
- Zweiter Zustand beschreiben
- Alle Informationen werden nur einmal gebraucht!

Aufgabe 2

a) Betrag eines Vektors

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$$

b) Richtung eines Vektors konstant

$$\underline{u}(t) = k(t) \cdot \underline{e}_u$$

c) Ebene wird durch Vektoren aufgespannt.
Ein Vektor parallel zur Ebene kann durch diese ausgedrückt werden.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme