

Theorie

Rechnen mit Einheitsvektoren:

Zwei Schreibweisen von Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$$

Kollonenschreibweise

Einheitsvektoren-schreibweise


einheitsvektor

Für die meisten Operationen kann man die \underline{e}_v einfach wie normale Konstanten behandeln.

Sie zeigen nur, welche Koordinatenachse man beschreibt.

$$(2x+3) \underline{e}_x = 2x \underline{e}_x + 3 \underline{e}_x$$

$$2x \underline{e}_x + 3 \underline{e}_y \neq (2x+3) \underline{e}_x \underline{e}_y$$

 Beim Ableiten und Integrieren muss man aber aufpassen!

Für **Kartesische** Koordinaten ist es noch recht simpel:

$$\frac{d}{dt} (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z) = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$$

Für **Zylindrische** und **Sphärische** Koordinaten leider nicht $\ddot{\text{ä}}$

$$\text{Zyl: } \frac{d}{dt} (s\underline{e}_s + z\underline{e}_z) = \dot{s}\underline{e}_s + s\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$$

$$\text{Sph: } \frac{d}{dt} (r\underline{e}_r) = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

Aber **wieso** ist das so **weird** ??

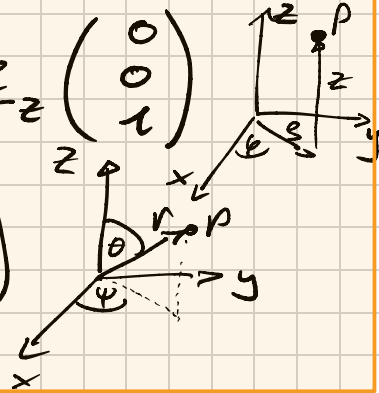
Das liegt daran, dass die **ev** in diesen zwei Systemen **nicht konstant** sind!

Um das zu verstehen, kann man sich die **ev** als mini-Kolumnenvektoren im Kartesischen System vorstellen:

Kartesisch: $\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zylindrisch: $\underline{e}_s = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sphärisch: $\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$



Mit diesem Wissen, können wir nun die Ableitung der zylindrischen Koordinaten

herleiten:

$$\frac{d}{dt} (\rho \underline{e}_s + z \underline{e}_z) = (\dot{\rho} \underline{e}_s + \rho \overset{\text{Multiplikationsregel}}{\dot{\underline{e}}_s}) + (\dot{z} \underline{e}_z + z \dot{\underline{e}}_z)$$

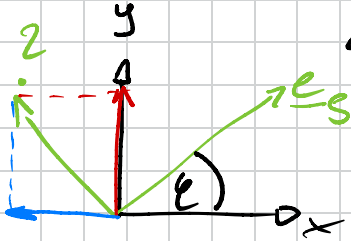
$$\underline{e}_s = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\underline{e}}_s = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Kettenregel}$$

$$\dot{\underline{e}}_s = \dot{\varphi}(t) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ +\cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}}_?$$

$$\dot{\underline{e}}_s = \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{was ist dieser neue ev?}$$

Zeichnen wir ihn!



Wenn wir diesen neuen \underline{ev} an die Spitze z von \underline{e}_s hängen, sehen wir dass er in die Richtung zeigt, in die sich \underline{e}_s dreht, wenn φ grösser wird. Deswegen nennen wir ihn \underline{e}_φ .

Also:

$$\dot{\underline{e}}_s = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_\varphi \leftarrow \begin{array}{l} \text{drehrichtung} \\ \text{winkelschnelligkeit} \end{array}$$

$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\underline{e}_z verhält sich wie eine kartesische Koordinate e , er ist konstant.

$$\dot{\underline{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist seine Ableitung = 0

Also:

$$\dot{s} \underline{e}_s + s \dot{\underline{e}}_s + \dot{z} \underline{e}_z + z \dot{\underline{e}}_z$$

$$= \dot{s} \underline{e}_s + s \dot{\underline{e}}_s + \dot{z} \underline{e}_z$$

Die Ableitung der sphärischen Koordinaten ist Analog, aber einiges mühsamer.

Ihr müsst nicht diese ganze Herleitung auswendig wissen. Ziel dieses Theorieteils ist es, euer Verständnis und Intuition der Geschw. in Zylindrischen und Sphärischen Koordinaten zu stärken