POLYBOX

Schnellübung 3

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 3

POLYBOX

Wiederholung Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

Rotationsgeschwindigkeit (= Winkelgeschwindigkeit)

$$\underline{\omega} = \omega \cdot \underbrace{\underline{e}_\omega}_{} = \omega \cdot \frac{Vektor\ Rotationsachse}{|Vektor\ Rotationsachse|}$$

Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 3

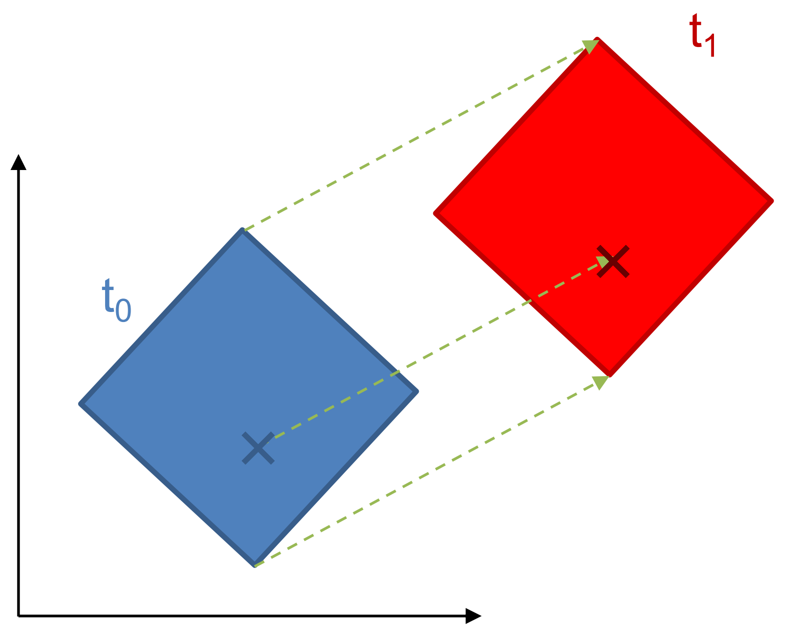
POLYBOX

Starrkörperbewegungen

Translation:

-alle Punkte des Körpers haben die gleiche Geschwindigkeit

-Verschiebung des Körpers im Raum



Einführung Schnellübung 3

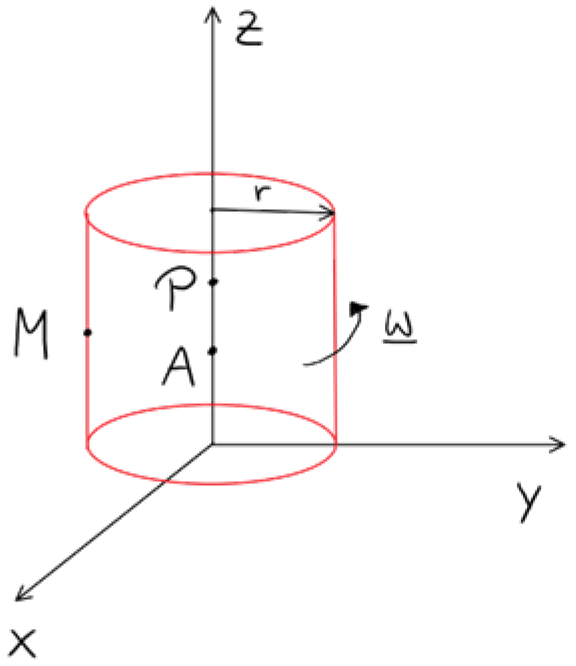
Starrkörperbewegungen

__Rotation:__

-eine Gerade ist in Ruhe = Rotationsachse μ

-Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers, gegeben durch:

$\underline{v_M} = \underline{\omega} \times \underline{AM} = \underline{\omega} \times \underline{PM}$ mit A und P Punkte auf μ



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 3

Starrkörperbewegungen

<u>Momentane Bewegungszustände</u>

–Translation

–Rotation (Kreiselung als Rotation)

–Schraubung (Kombination aus Rotation und Translation)

POLYBOX

Einführung Schnellübung 3

POLYBOX

Starrkörperformel

<u>Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes A</u>

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$$

A und B sind zwei beliebige Punkte des starren Köpers, der eine allgemeine Bewegung ausführt.
Anmerkung: Für die Bestimmung von $\underline{\omega}$ eines allgemeinen Bewegungszustandes anhand der Formel wird ein weiterer Punkt, der nicht auf einer Linie mit A und B liegt und dessen Geschwindigkeit bekannt ist, benötigt.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 3

POLYBOX

Aufgabe 1

a) Rotationsachse gegeben, entsprechende Rotationsgeschwindigkeit berechnen

Tipp: μ einzeichnen

Schnellübung 3

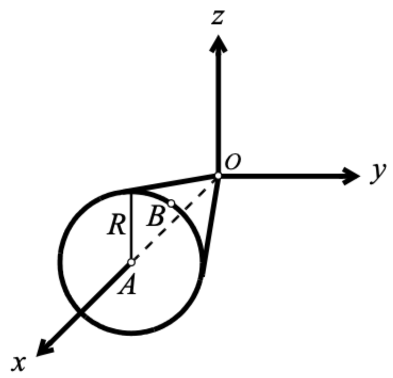
POLYBOX

Aufgabe 1

Ein Kreiskegel (Radius R) mit der Grundfläche in der Ebene $x = R$ und der Spitze in $O(0,0,0)$ rotiert um eine Achse, welche durch die Punkte $A(R,0,0)$ und $B(R, R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ verläuft.

Die Geschwindigkeit im Ursprung O ist $\underline{v}_0 = (a, -v, v)$, dabei kann v als eine gegebene Konstante angesehen werden.

a) Berechnen Sie die Konstante a, sowie die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$.



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

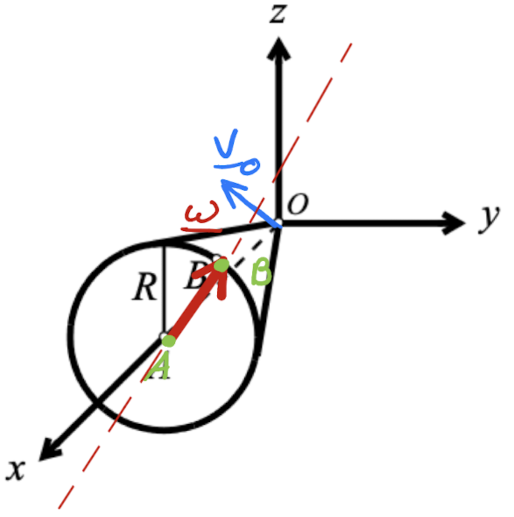
Lösung 1.

1. Richtung von $\underline{\omega}$ anhand von A und B finden
2. $\underline{AO}$ berechnen
3. Starrkörperformel aufstellen und löen
4. Gefundenes ω in $\underline{\omega}$ einsetzen

Schnellübung 3

1.

$* \ \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



geg.:

$\underline{v}_A = \underline{0}, \quad \underline{r}_A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_B = \underline{0}, \quad \underline{r}_B = \begin{pmatrix} R \\ R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} a \\ -v \\ v \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_0 = \underline{0}$

$\underline{\omega} = \omega \frac{\underline{AB}}{|\underline{AB}|} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\underline{AO} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Starrkörperformel:

$$\underline{v}_0 = \cancelto{0}{\underline{v}_A} + \underline{\omega} \times \underline{AO}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega/\sqrt{2} \\ \omega/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} a \\ -v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega/\sqrt{2} \\ R\omega/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$a = 0$ aus I

$\omega = \frac{\sqrt{2}\, v}{R}$ aus II oder III

$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/R \\ v/R \end{pmatrix}$ aus II mit $\underline{\omega}$

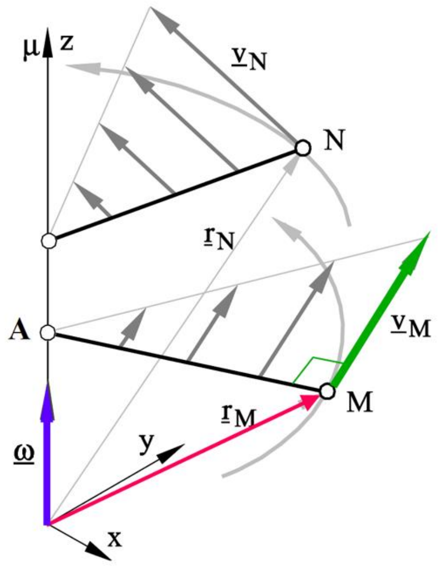
Tipps Schnellübung 3

Aufgabe 2

a) Karussell als System, verhält sich momentan wie ein starrer Körper

$$\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{OM}$$

$$|\underline{v}_M| = |\underline{\omega}| \cdot |\underline{AM}|$$

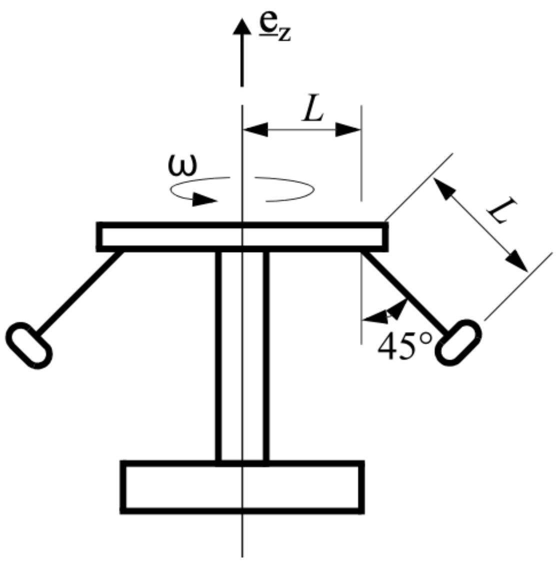


Schnellübung 3

Aufgabe 2

Das im Bild dargestellte Karussell dreht mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega} = \omega \cdot \underline{e}_z$.

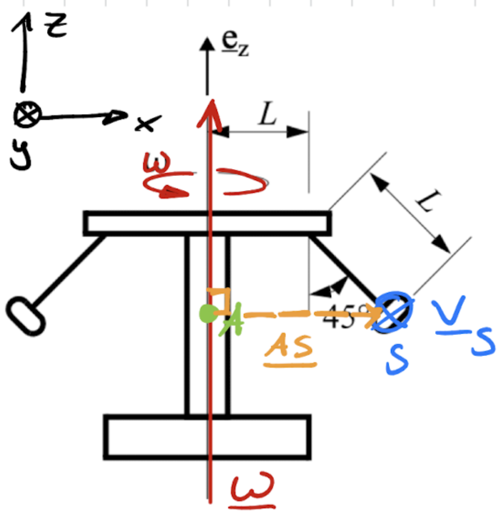
a) Wie gross ist die Schnelligkeit der Sessel?



Lösung 2

1. Abstand zwischen Achse und Sitz berechnen
2. Starrkörperformel aufstellen und lösen
3. Betrag von $\underline{v}_S$ nehmen

2.



geg.:

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$$

$$\underline{AS} = \begin{pmatrix}L+L\cos(45°)\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_A = \underline{0}, \quad \underline{v}_S = \begin{pmatrix}0\\v_y\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_S = \underbrace{\cancel{\underline{v}_A}}_{0} + \underline{\omega} \times \underline{AS}$$

$$\begin{pmatrix}0\\v_y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}L(1+1/\sqrt{2})\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\v_y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega L(1+1/\sqrt{2})\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\dot{s} = |\underline{v}_S| = \omega L\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

1. $\dot{s}$ direkt mit Formel berechnen

Alternativ:

$$\dot{s} = \omega \cdot R$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{s} = \omega L\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 3

POLYBOX

Aufgabe 3

a) Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten (siehe Hausübung 2)

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$
$$v_z = \dot{z}$$

b) ! Fallunterscheidung !

c) Anfangsschnelligkeit: $|\underline{v}|$ für $t = 0$

Schnellübung 3

POLYBOX

Aufgabe 3

Die Bewegung eines materiellen Punktes M ist in Zylinderkoordinaten durch die Bewegungsgleichung

$$\rho = R \qquad \varphi = a\sin(\kappa t) \qquad z = b\left[\sin(\kappa t)\right]^2 \qquad (t \geq 0)$$

gegeben. R und κ sind gegebene positive Konstanten, wohingegen a und b noch unbestimmte positive Konstanten sind.

a) Geben Sie die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{v}$ mit zylindrischer Basis an.

b) Ermitteln Sie a und b unter der Voraussetzung, dass im Punkt A die Schnelligkeit von M zum ersten Mal null ist. Der Punkt A ist in Zylinderkoordinaten gegeben als $A \equiv (R, \pi, h)$, wobei R, π, h gegebene Konstanten sind.

c) Berechnen Sie die Anfangsschnelligkeit $v(0)$.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3 a)

POLYBOX

1. $\underline{r}$ mit Formel auf ZF ableiten

Zylindrisch $\quad \underline{\mathbf{r}} = \rho \underline{\mathbf{e}}_\rho + z \underline{\mathbf{e}}_z$

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{\rho} \underline{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \underline{\mathbf{e}}_z$$

3a)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R \\ a\sin(kt) \\ b(\sin(kt))^2 \end{pmatrix}_{\rho\varphi z}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\rho\varphi z} = \begin{pmatrix} 0 \\ Rak\cos(kt) \\ 2bk\sin(kt)\cos(kt) \end{pmatrix}_{\rho\varphi z}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3 b)

1. $\underline{v}$ gleich null setzen
2. t_1 in $\underline{r}$ einsetzen und gleich $\underline{A}$ setzen

b)

$$\dot{s} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \underline{v} \overset{!}{=} 0$$

$$v_\varrho: \; Rak\cos(kt) \overset{!}{=} 0$$

$$\cos(kt) \overset{!}{=} 0$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2k}(1+2n), \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$v_z: \; 2bk\sin(kt)\cos(kt) \overset{!}{=} 0$$

$$\sin(kt) \overset{!}{=} 0 \text{ oder } \cos(kt) \overset{!}{=} 0$$

für $\dot{s} = 0$ muss gelten:

I: $v_s = v_\varrho = v_z = 0$

für $t_1 = \frac{\pi}{2k}(1+2n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gilt I!

$$\underline{r}\left(\frac{\pi}{2k}\right) \overset{!}{=} \underline{A}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \pi \\ h \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = \pi \\ b = h \end{matrix}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3 c)

POLYBOX

1. $\underline{v}$ bei $t = 0$ berechnen
2. Betrag nehmen

c)

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\pi k \cos(kt) \\ 2hk \sin(kt)\cos(kt) \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\pi k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{s} = |\underline{v}(0)| = R\pi k}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 3

Aufgabe 1

-$\underline{r} = r(t)\underline{e}_r(\theta(t), \psi(t))$
-Zeitlich ableiten
-$\underline{e}_r$ und $\underline{e}_\theta$ zuerst als Funktion von $\underline{e}_\rho$ und $\underline{e}_z$

Aufgabe 2

-

Aufgabe 3

- $\underline{\omega}$ finden
- Richtungssinn von $\underline{\omega}$ aus der Zeichnung entnehmen

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback