POLYBOX

# Schnellübung 4

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Zwischenprüfungen („Klausuren“)

POLYBOX

- 1. Klausur findet statt am **Do 06.11.2025, Start 18:30**
    - Prüfung 45min; ca. 1.5h einrechnen
- Räume werden noch bekanntgegeben, keine Anmeldung notwendig
- Klausuren sind freiwillig und zählen 30% **verbessernd** (beide Klausuren kombiniert; nicht teilgenommen → Note 1)
- RepetentInnen müssen die Klausuren erneut schreiben, um die Vornote zu bekommen (alte Vornoten können nicht übernommen werden)
- (Zusätzliche) Mittagspräsenzen (12:15-13:00) in der Woche der Prüfung:

  Montag 3.11. ML J 34.1

  Dienstag 4.11. ML F 40

  Mittwoch 5.11. ML J 37.1

  Donnerstag 6.11. ML J 34.1



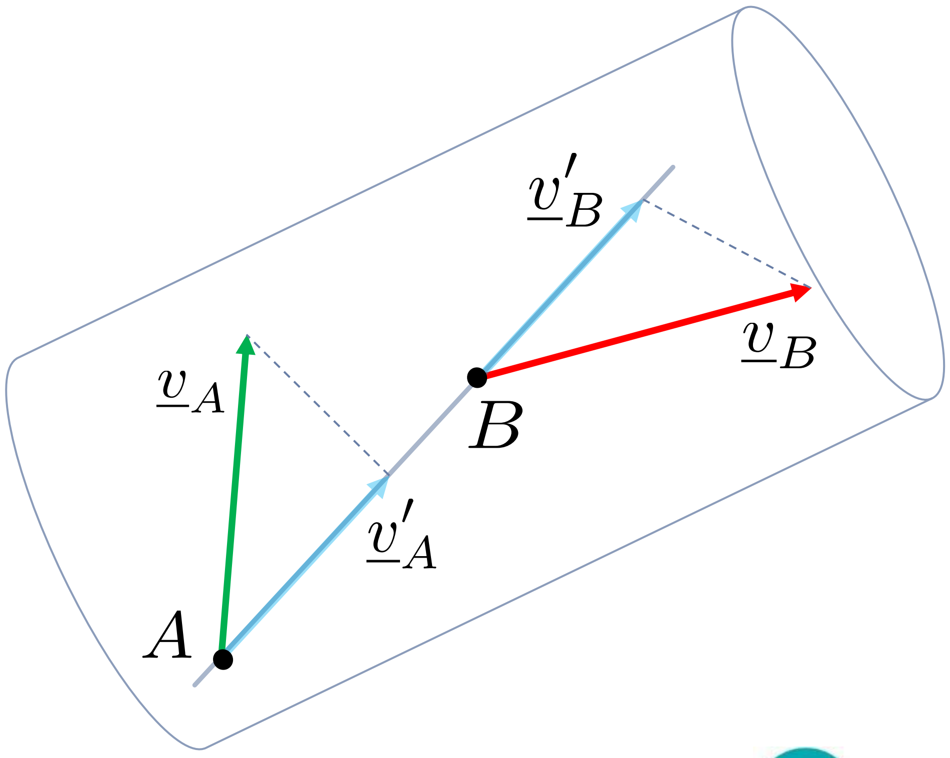
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Einführung Schnellübung 4

## Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG)

$$\underline{v}'_A = \underline{v}'_B$$

Die Projektionen der Geschwindigkeit zweier Punkte eines Starrkörpers auf deren Verbindungsgerade muss immer identisch sein
(Ansonsten handelt es sich um einen deformierbaren Körper → Mechanik 2)



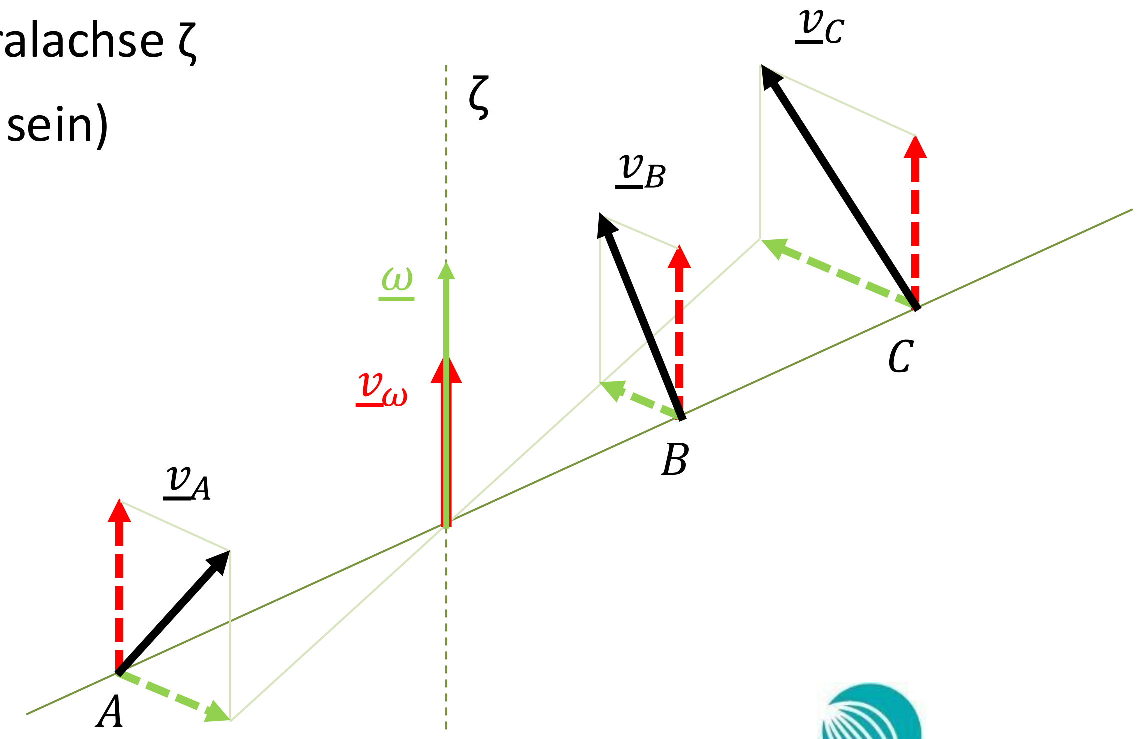

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Einführung Schnellübung 4

## Allgemeine Bewegung & Zentralachse

- Allg. Bewegung = Rotation um „translatierte" Zentralachse ζ
- Momentane Schraube (ζ kann zeitlich veränderlich sein)




POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Einführung Schnellübung 4

POLYBOX

## Kinemate

- Gültig in *einem Punkt*, z.B. Kinemate in Punkt B:

$$\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$$

## Invarianten

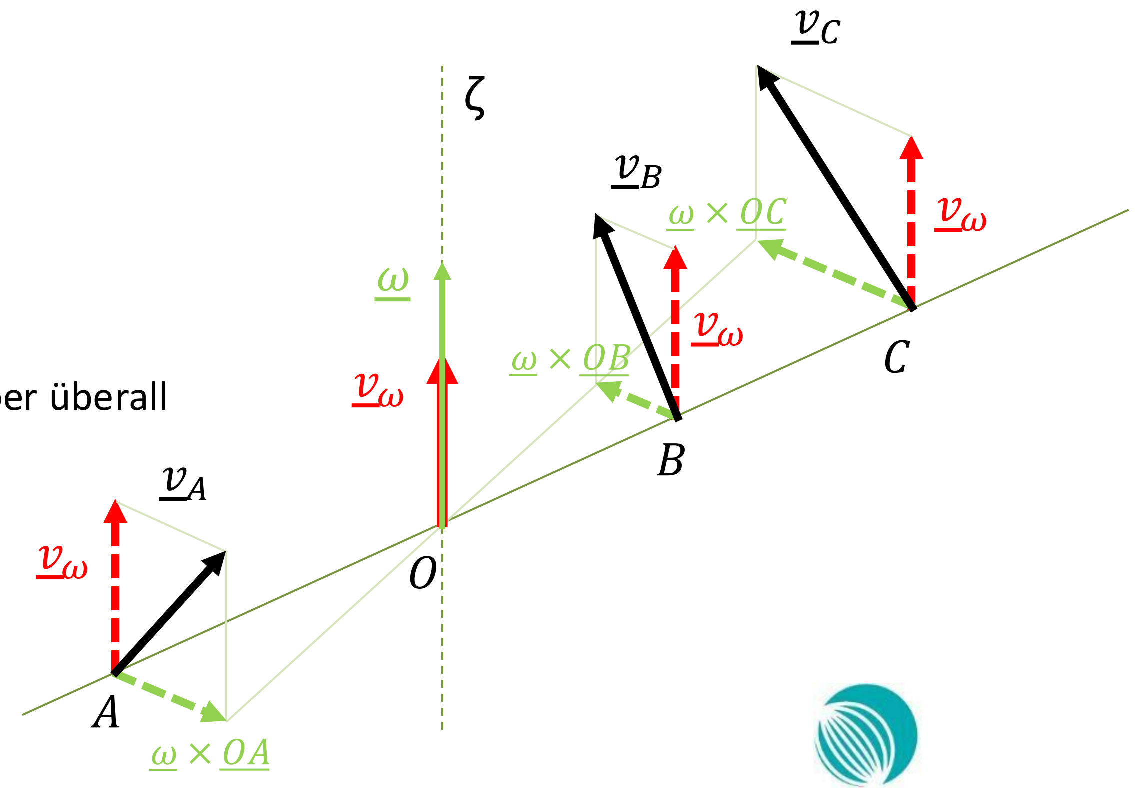
- 2 Invarianten; gültig für den *gesamten* Starrkörper

$$\{\underline{v}_\omega, \underline{\omega}\}$$

- 1. Invariante: $\underline{\omega}$ ist hier zum Verständnis auf ζ dargestellt, gilt aber überall

  → Rotationsanteil jedes Punktes resultiert aus $\underline{\omega} \times \underline{r}$

- 2. Invariante: $\underline{v}_\omega$ ist der Translationsanteil jedes Punktes
- Die Geschwindigkeit $\underline{v}$ eines Punktes ergibt sich aus der Kombination von Rotations- und Translationsteil




IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Einführung Schnellübung 4

POLYBOX

## Invarianten berechnen

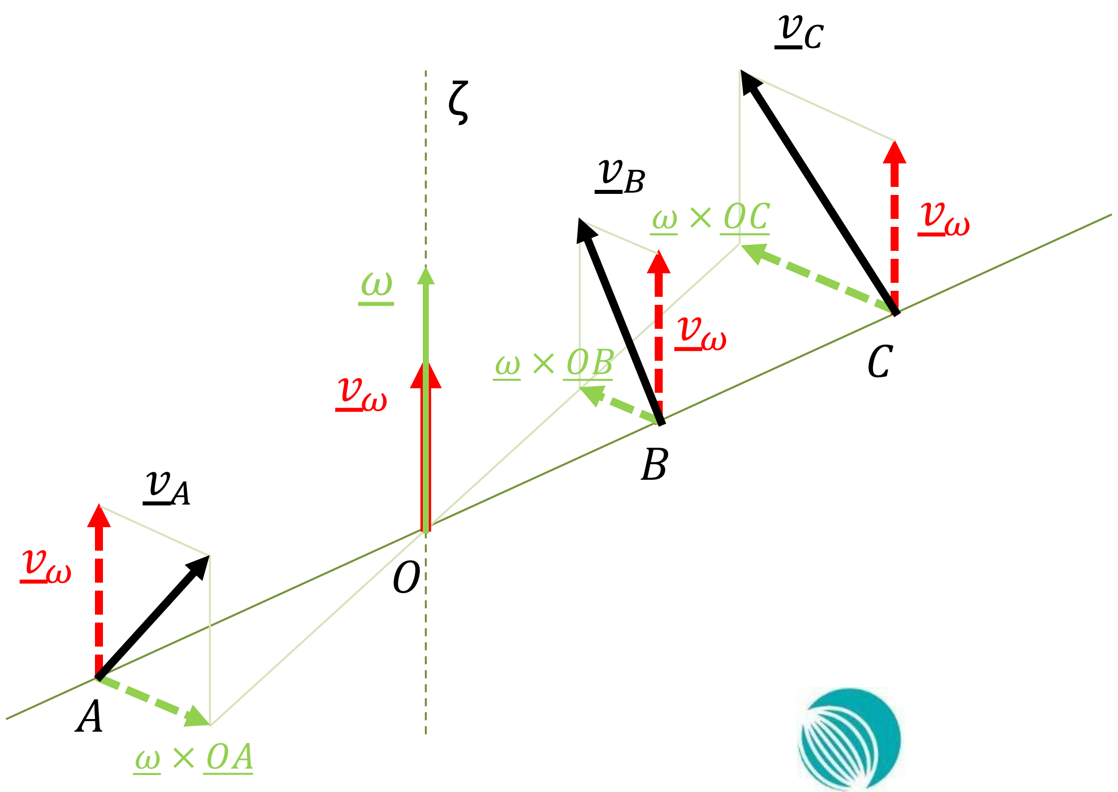
$$\underline{\omega} = \omega \cdot \underline{e}_\omega \qquad \underline{e}_\omega = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$$

$$\underline{v}_\omega = \left(\underline{v}_A \cdot \underline{e}_\omega\right) \cdot \underline{e}_\omega$$

Es gilt aus der Starrkörperformel:

$$\underline{v}_A \cdot \underline{\omega} = \underline{v}_B \cdot \underline{\omega}$$

für alle Punkte A, B im starren Körper






IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

# Einführung Schnellübung 4

## Bestimmung der Zentralachse

1. Geg.: Beliebiger Punkt $B$ mit bekannter Kinemate $\left\{\underline{v_B}, \underline{\omega}\right\}$
2. Invariante $\underline{v_\omega}$ bestimmen: $\underline{v_\omega} = \left(\underline{v_B} \cdot \underline{e_\omega}\right) \cdot \underline{e_\omega}$ mit $\underline{e_\omega} = \frac{\omega}{|\underline{\omega}|}$
3. Unbekannter Punkt $Z = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix}$ auf Zentralachse $\zeta$ $\left(\underline{v_Z} = \underline{v_\omega}\right)$
4. Starrkörperformel mit beliebigem Punkt $B$ aufstellen: $\underline{v_Z} = \underline{v_\omega} = \underline{v_B} + \underline{\omega} \times \underline{BZ}$
5. Formel nach $z_x, z_y, z_z$ auflösen → meistens bleiben zwei Unbekannte bestehen
6. Für eine der Unbekannten einen Wert wählen (<u>Eine Unbekannte frei wählbar</u>)
7. Zweite Unbekannte nun berechnen
8. Zentralachse: $\zeta = \underline{Z} + \lambda \cdot \underline{\omega} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ mit frei wählbarem Parameter $\lambda$



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Tipps Schnellübung 4

POLYBOX

**Aufgabe 1**

- Definition Gleiten und Rollen (bei Unterlage in Ruhelage):

    Gleiten: $\underline{v}$ parallel oder tangential zur Unterlage

    Rollen: $\underline{v} = \underline{0}$



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

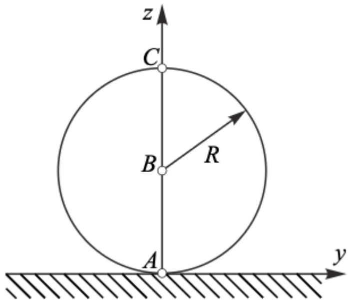
# Tipps Schnellübung 4

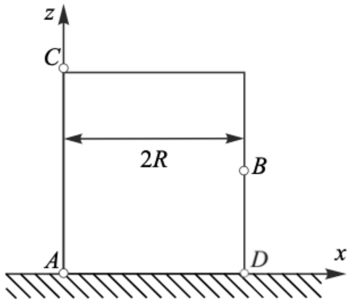
POLYBOX

## Aufgabe 1

Auf der Ebene $z = 0$ (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Zylinder (Radius $R$, Länge $2R$) so, dass die z-Komponente der Geschwindigkeiten in den Punkten $A$ und $D$ null ist. Der momentane Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten $\underline{v}_A = v\,\underline{e}_y$, $\underline{v}_B = 2v\,\underline{e}_y$, $\underline{v}_C = -v\,\underline{e}_y$ der Punkte $A$, $B$ und $C$ beschrieben.

Begründen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ keine y-Komponente haben kann und dass daher die Bewegung eine momentane Rotation ist. Welches $\underline{\omega}$ und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder?






IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

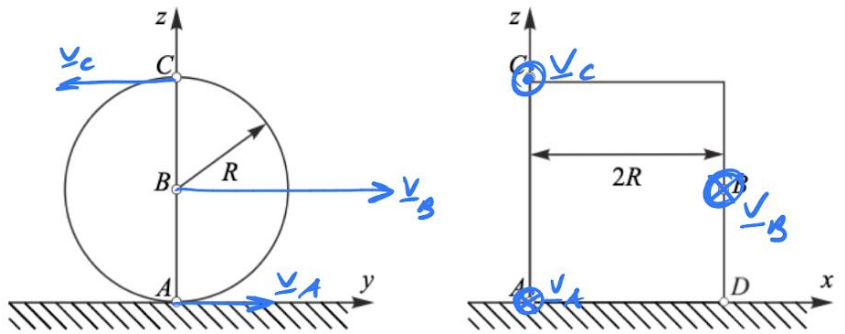
# Lösung 1.

1. Vier Teilaufgaben
2. Projektion von $\underline{v}_A$ und $\underline{v}_B$ auf $\underline{\omega}$ gleichsetzen

Schnellübung 4

⊙ "aus Blatt heraus"
⊗ "ins Blatt hinein"

1.




(a) Zeigen dass $\underline{\omega}$ keine y-Komponente hat

(b) Beweisen dass es sich um eine momentane Rotation handelt

(c) $\underline{\omega}$ bestimmen

(d) $u$ bestimmen

(a) $\underline{v}_A \cdot \underline{\omega} \overset{!}{=} \underline{v}_B \cdot \underline{\omega}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$v\omega_y \overset{!}{=} 2v\omega_y \longrightarrow$ nur richtig wenn $\omega_y = 0$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 1.

1. keine Translation wegen ungleichen Geschw.
2. keine Schraubung da $\underline{v_\omega} = 0$
3. Also ist es eine Rotation!

(b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{3 mögliche momentane Zustände:}\\ \text{- Translation}\\ \text{- Schraubung}\\ \text{- Rotation}\end{array}}$

• Translation:

$\underline{v}_A \neq \underline{v}_B \neq \underline{v}_C \rightarrow$ keine Translation $\rightarrow \underline{\omega} \neq \underline{0}$

• Schraubung:

Wir wissen dass $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

müssen nun $\underline{v}_\omega$ bestimmen!

$$\underline{v}_\omega = \underline{v}_A \cdot \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}\, \underline{e}_\omega = \frac{1}{|\underline{\omega}|} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}}_{0} \underline{e}_\omega = \underline{0}$$

$\hookrightarrow \underline{\omega} \neq 0$ und $\underline{v}_\omega = 0 \rightarrow$ Rotation

POLYBOX

IMES

Institute for Mechanical Systems

Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 1.

1. Starrkörperformel zwischen $A$ und $B$

(c)

geg: $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$, $\underline{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{BA} = \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$, $\underline{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2R\omega_z + R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

trivial: $0 = 0$

$\triangleright$ $v = 2v + R(\omega_x - 2\omega_z)$

I: $\boxed{\dfrac{v}{R} = 2\omega_z - \omega_x}$ $\rightarrow$ Fehlt noch eine Gleichung!



POLYBOX

IMES

Institute for Mechanical Systems

Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 1.

1. Starrkörperformel zwischen $A$ und $C$
2. erhaltenes $\omega_x$ in $I$ einsetzen
3. für $\omega_z$ lösen

$$\underline{v}_A = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CA}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2v = 2R\omega_x$$

$$\mathrm{II}: \boxed{\omega_x = \frac{v}{R}}$$

$$\mathrm{I}: \frac{v}{R} = 2\omega_z - \omega_x \quad \leftarrow \mathrm{II}$$

$$\frac{v}{R} = 2\omega_z - \frac{v}{R}$$

$$\boxed{\omega_z = \frac{v}{R}}$$

$$\underline{\omega} = \frac{v}{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

POLYBOX



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 1.

1. Punkt $\underline{P}$ auf $\mu$ definieren
2. Punkt mit bekannter Geschw. auswählen (darf nicht auf $\mu$ sein!)
3. Starrkörperformel aufstellen und auf Koordinaten von P auflösen

(d) Erinnerung Geradengleichung:

$$\mu: \underline{r}(s) = \underbrace{\underline{P}_0}_{\text{Startpunkt}} + \overbrace{s}^{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\underline{v}_R}_{\text{Richtungsvektor}}$$

1. Beliebiger Punkt $\underline{P}$ auf $\mu \rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_\omega = 0$
2. Beilibiger Punkt im Zylinder: z.B. $\underline{A}$
3. Starrkörpergleichung

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v/R \\ 0 \\ v/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x - 0 \\ P_y - 0 \\ P_z - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v}{R} P_y \\ \frac{v}{R}(P_x - P_z) \\ \frac{v}{R} P_y \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{P_y = 0}$$

$$\rightarrow 0 = v + \frac{v}{R}(P_x - P_z)$$

# Lösung 1.

1. $P_z$ von $P_x$ abhängig machen und in $\underline{P}$ einsetzen
2. Beliebigen Wert für $P_x$ auswählen
3. $\underline{P}$ ist nun der Anfangspunkt und der Richtungsvektor ist parallel zu $\underline{\omega}$

$$V = \frac{v}{R}(P_z - P_x)$$

$$R = P_z - P_x$$

$$\boxed{P_z = R + P_x}$$

$$\hookrightarrow \underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ 0 \\ R + P_x \end{pmatrix} \rightarrow P_x = 0$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \text{ Startpunkt}$$

$\mu$ ist immer parallel zu $\underline{\omega}$.

Also ist $\underline{\omega}$ unser Richtungsvektor

$$\mu: \underline{r}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v/R \\ 0 \\ v/R \end{pmatrix}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Tipps Schnellübung 4

POLYBOX

**Aufgabe 2**

- Ermittle ζ analytisch (rechnerisch) und graphisch
- Punkte mit minimaler/maximaler Schnelligkeit: ζ visualisieren und minimale/maximale Abstände finden



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

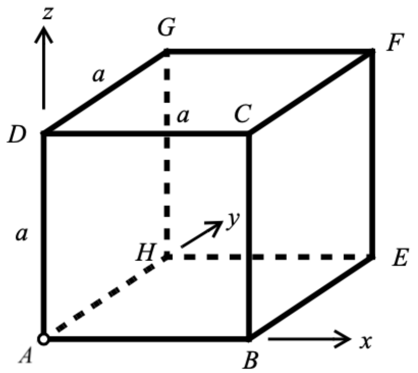
# Schnellübung 4

POLYBOX

## Aufgabe 2

Der momentane Bewegungszustand eines starren Würfels (Kantenlänge $a = 1\text{m}$) ist gegeben durch die Kinemate in $A$:

$$\underline{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} {}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}}; \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} {}^{1}\!/\!_{\text{s}}$$




Bestimmen Sie die Schraubungsachse (Parameterdarstellung). Untersuchen Sie anschliessend, welche Punkte des Würfels minimale bzw. maximale Schnelligkeit haben. Wie gross sind die entsprechenden Werte?




IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 2

1. $\underline{v}_\omega$ bestimmen
2. Punkt $\underline{P}$ auf $\mu$ wählen

2. Ähnlich wie 1(d), aber mit Schraubung!

geg: $\underline{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$, $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$ geometrie

$\underline{v}_\omega$ bestimmen:

$$\underline{v}_\omega = (\underline{v}_A \cdot \underline{e}_\omega)\underline{e}_\omega = \left(\underline{v}_A \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}\right)\frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$$

$$\underline{v}_\omega = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\frac{1}{s}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s}\right)\frac{1}{\sqrt{2}\frac{1}{s}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s}$$

$$\underline{v}_\omega = \frac{1}{2}(2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{m}{s}$$

$$\underline{v}_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{m}{s}$$

Punkt $\underline{P}$ auf $\mu$ mit $\underline{v}_P = \underline{v}_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{m}{s}$

POLYBOX



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 2

1. Starrkörperformel aufstellen und Lösen
2. $P_y$ von $P_z$ abhängig machen und in $\underline{P}$ einsetzen
3. Beliebigen Wert für $P_y$ auswählen

POLYBOX

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \right) \frac{m}{s}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_z - P_y \\ P_x \\ -P_x \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{P_x = 0}$$

$$0 = 1 + P_z - P_y$$

$$P_y = P_z + 1$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_z + 1 \\ \cancel{P_y}\, z \end{pmatrix} m \rightarrow \cancel{P_y}\, z = 0$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$\mathcal{M}: \underline{r}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

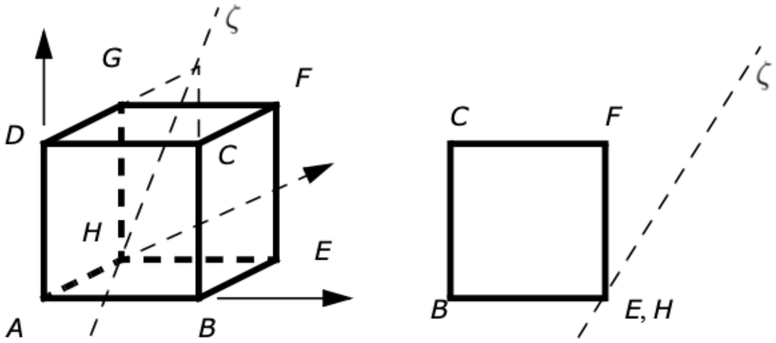


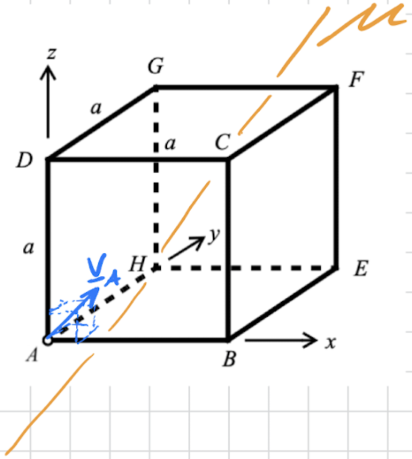


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Lösung 2

1. Schnellster Punkt ist $C$
2. Langsamster Punkt ist $H$
3. Geschwinfigkeiten mit Starrkörperformel berechnen
4. Betrag nehmen für Schnelligkeiten




Schnellster Punkt
↳ am weitesten von $\mu$ entfernt → C

Langsamster Punkt
↳ auf $\mu$ → H

$$\underline{v}_C = \underline{v}_\omega + \underline{\omega} \times \underline{HC}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \times \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\dot{s}_C = |\underline{v}_C| = 2\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

$$\dot{s}_H = |\underline{v}_H| = |\underline{v}_\omega| = \sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

POLYBOX

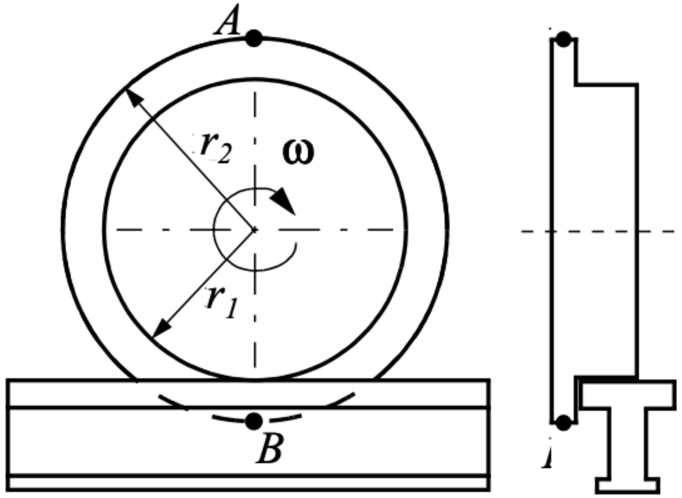


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Schnellübung 4

## Aufgabe 3

Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit $\omega$. Wie gross ist die Schnelligkeit des obersten Punktes $A$ und des untersten Punktes $B$ des Radkranzes?
In welche Richtungen zeigen die jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren in diesen beiden Punkten?






IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

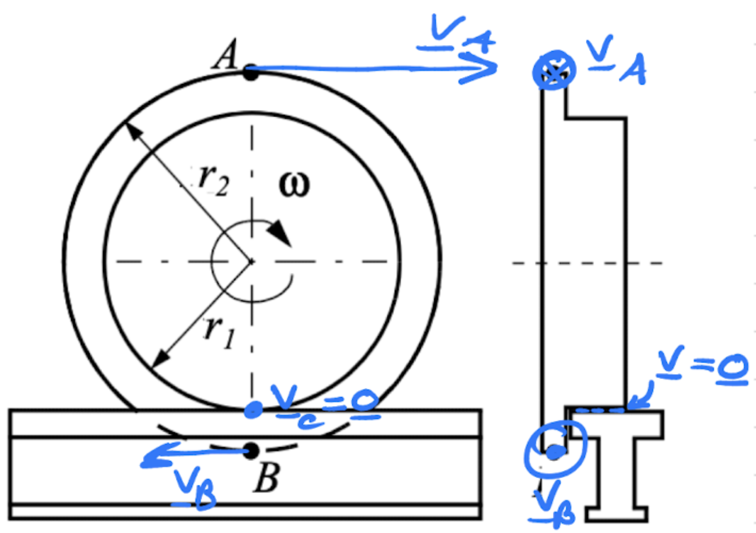
POLYBOX

# Lösung 3

1. $\underline{v_C} = 0$
2. $\dot{s}_A$ und $\dot{s}_B$ mit Rotationsschnelligkeit Formel berechnen

POLYBOX

3.




⚠ Rollen ohne Rutschen ⇒ Kontaktpunkt hat $\underline{v} = \underline{0}$

$$\underline{v}_A = \overset{=0}{\underline{v}_C} + \underline{\omega} \times \underline{CA}$$

$$\hookrightarrow \dot{s}_A = \omega \cdot |\underline{CA}| = \underline{\underline{\omega(r_1+r_2) = \dot{s}_A}}$$

$$\hookrightarrow \dot{s}_B = \omega \cdot |\underline{CB}| = \underline{\underline{\omega(r_2-r_1) = \dot{s}_B}}$$

# Tipps Hausübung 4

POLYBOX

**Aufgabe 1**

- Keine Tipps

**Aufgabe 2**

- SdpG
- Skalarprodukt ist 0, falls Vektoren senkrecht zueinander stehen
  → Ebene Rotation: $\underline{v_A} \cdot \underline{\omega} = 0$

**Aufgabe 3**

- Starrkörperformel zwischen Punkten um Unbekannte zu finden
- Zentralachse



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

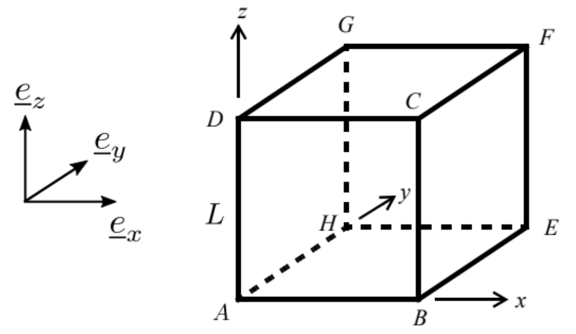
# Prüfungsaufgaben

## Aufgabe 1 (ZP 1 2023)

- $\underline{v}_\omega$ muss Parallel zu $\underline{\omega}$ sein
- Die Projektion von $\underline{v}_A$ auf die y-z Ebene schaut bereits in die $\underline{e}_\omega$ Richtung

Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $L$, mit bekannter Kinemate im Punkt $A$.

$$\underline{v}_A = (3v, v, v); \quad \underline{\omega} = (0, \frac{v}{L}, \frac{v}{L})$$




A1.1 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die zweite Invariante des Bewegungszustandes.

a) $\cancel{\underline{v}_\omega = \sqrt{2}\,(0, v, v)}$

b) $\cancel{\underline{v}_\omega = \sqrt{2}\,(3v, v, v)}$

c) $\cancel{\underline{v}_\omega = (3v, 0, 0)}$

d) $\cancel{\underline{v}_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(3v, v, v)}$

e) $\cancel{\underline{v}_\omega = (3v, v, v)}$

f) $\boxed{\underline{v}_\omega = (0, v, v)}$

g) $\cancel{\underline{v}_\omega = (0, 2v, 2v)}$

h) ~~Keine der Lösungen ist korrekt.~~

# Prüfungsaufgaben

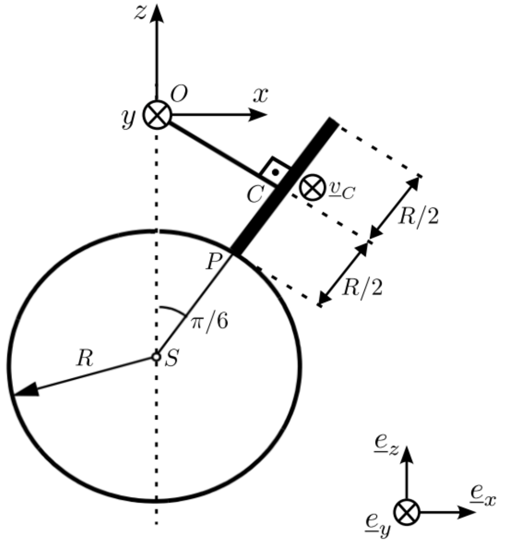
## Aufgabe 2 (ZP 1 2022)

1. Mom. Rotation erkennen
2. Zwei Punkte mit $\underline{v} = 0$ suchen
3. Hauptachse $\zeta$ einzeichnen

Auf einer ruhenden Kugel mit dem Radius $R$ rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$. Die Kreisscheibe ist mit einem Stab $CO$ verschweisst, welcher in $O$ gelenkig gelagert ist. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt $P$ die Normale zur Kugelfläche, welche mit der z-Achse einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Koordinatenursprung befindet sich in $O$.

Es gilt: $|\underline{SP}| = |\underline{OP}| = R$.

Der Mittelpunkt C der Kreisscheibe bewegt sich momentan mit der Geschwindigkeit $\underline{v}_C = (0, v, 0)$.




A3.1 (*2 Punkte*) Wählen Sie alle korrekten Darstellungen der momentanen Rotationsachse $\mu$ der Kreisscheibe in kartesischen Koordinaten.

a) $\lambda(0, 0, 1)$

b) $\lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$

c) $\lambda(1, 0, -\sqrt{3})$

d) $(\frac{3}{4}R, 0, -\frac{\sqrt{3}}{4}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$

e) $(0, 0, -\sqrt{3}R) + \lambda(0, 0, -1)$

f) $(\frac{1}{2}R, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}R) + \lambda(-1, 0, \sqrt{3})$

g) $(\frac{\sqrt{3}}{2}R, 0, -\frac{1}{2}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$

h) Keine der Lösungen ist korrekt.

# Prüfungsaufgaben

## Aufgabe 2 (ZP 1 2022)

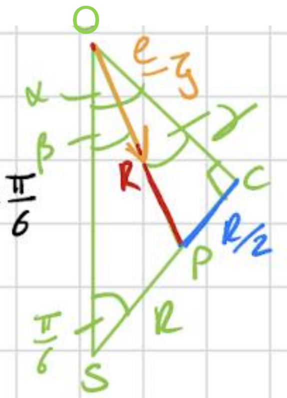
4. Durch Geometrie $e_\zeta$ finden

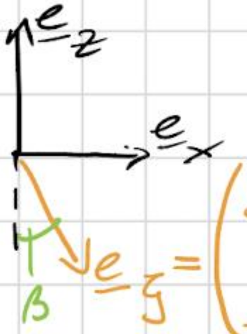
$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\gamma = \arcsin\left(\frac{R/2}{R}\right) = \frac{\pi}{6}$

mit Tabelle

$\beta = \alpha - \gamma = \frac{\pi}{6}$



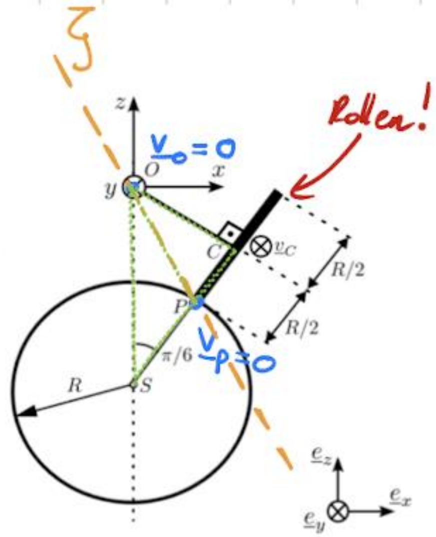

$$e_\zeta = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \\ -\cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3 (7 Punkte)

Auf einer ruhenden Kugel mit dem Radius $R$ rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$. Die Kreisscheibe ist mit einem Stab $CO$ verschweisst, welcher in $O$ gelenkig gelagert ist. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt $P$ die Normale zur Kugelfläche, welche mit der $z$-Achse einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Koordinatenursprung befindet sich in $O$.

Es gilt: $|\underline{SP}| = |\underline{OP}| = R$.

Der Mittelpunkt C der Kreisscheibe bewegt sich momentan mit der Geschwindigkeit $\underline{v}_C = (0, v, 0)$.




A3.1 (*2 Punkte*) Wählen Sie alle korrekten Darstellungen der momentanen Rotationsachse $\mu$ der Kreisscheibe in kartesischen Koordinaten. nicht parallel zu $e_\zeta$!

- ~~a) $\lambda(0, 0, 1)$~~ $(+ \underline{0})$
- ~~b) $\lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$~~ $(+ \underline{0})$
- c) $\lambda(1, 0, -\sqrt{3})$ $(+ \underline{0})$
- ~~d) $(\frac{3}{4}R, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$~~
- ~~e) $(0, 0, \sqrt{3}R) + \lambda(0, 0, -1)$~~
- f) $(\frac{1}{2}R, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}R) + \lambda(-1, 0, \sqrt{3})$
- ~~g) $(\frac{\sqrt{3}}{2}R, 0, \frac{1}{2}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$~~
- h) Keine der Lösungen ist korrekt.

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Prüfungsaufgaben

POLYBOX

## Aufgabe 2 (ZP 1 2022)

5. Kontrollieren dass Punkte auch auf $\zeta$ liegen

$\underline{O}$ liegt auf Punkt O
↳ auf Hauptachse c) ✓

f):

$$\frac{1}{2}R\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}R$$

$$\frac{1}{2}R\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}R\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\underline{0}$$

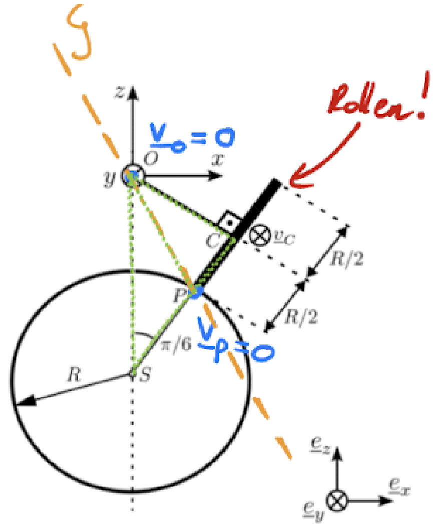
$\underline{0}$ liegt auf $\zeta$ → f) ✓

**Aufgabe 3 (7 Punkte)**

Auf einer ruhenden Kugel mit dem Radius $R$ rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$. Die Kreisscheibe ist mit einem Stab $CO$ verschweisst, welcher in $O$ gelenkig gelagert ist. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt $P$ die Normale zur Kugelfläche, welche mit der z-Achse einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Koordinatenursprung befindet sich in $O$.

Es gilt: $|\underline{SP}| = |\underline{OP}| = R$.

Der Mittelpunkt C der Kreisscheibe bewegt sich momentan mit der Geschwindigkeit $\underline{v}_C = (0, v, 0)$.




A3.1 (*2 Punkte*) Wählen Sie alle korrekten Darstellungen der momentanen Rotationsachse $\mu$ der Kreisscheibe in kartesischen Koordinaten.

nicht parallel zu $\underline{e}_\zeta$!

- ~~a) $\lambda(0, 0, 1)$ $(+\underline{0})$~~
- ~~b) $\lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$ $(+\underline{0})$~~
- c) $\boxed{\lambda(1, 0, -\sqrt{3})\ (+\underline{0})}$
- ~~d) $(\frac{3}{4}R, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$~~
- ~~e) $(0, 0, \sqrt{3}R) + \lambda(0, 0, -1)$~~
- f) $\boxed{(\frac{1}{2}R, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}R) + \lambda(-1, 0, \sqrt{3})}$
- ~~g) $(\frac{\sqrt{3}}{2}R, 0, \frac{1}{2}R) + \lambda(\sqrt{3}, 0, -1)$~~
- ~~h) Keine der Lösungen ist korrekt~~

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Prüfungsaufgaben

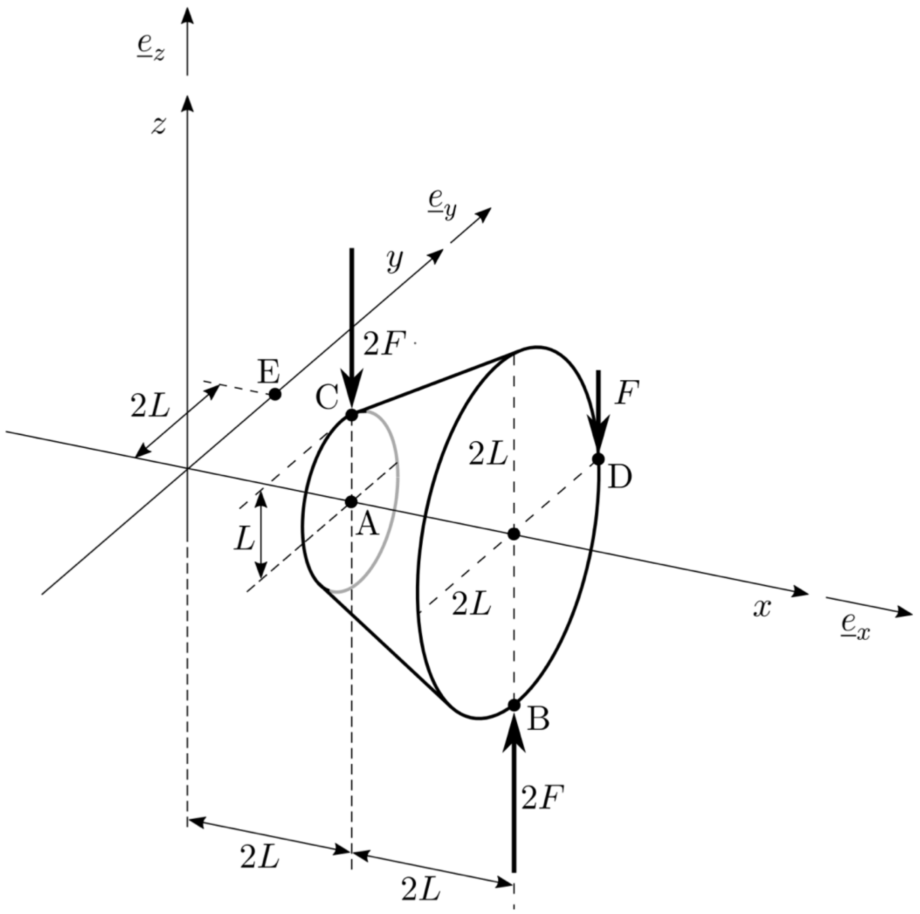
## Aufgabe 3 (BP Winter 2024)

### Grosse Aufgabe (19 Punkte)

Der abgebildete starre Kegelstumpf weist folgende Geometrie auf: Höhe 2L, Radius der Deckfläche L, Radius der Grundfläche 2L. Die Symmetrieachse des Körpers liegt auf der x-Achse. Der körperfeste Punkt A des Kegelstumpfs weist momentan folgende Kinemate $\{\underline{v}_A, \underline{\omega}\}$ auf:

$$\underline{v}_A = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ -2v \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 2v/L \\ v/L \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (9 Punkte) Bestimmen Sie für den momentanen Bewegungszustand
   - i) die Geschwindigkeit $\underline{v}_C$ im Punkt C;
   - ii) die 2. Invariante der Bewegung $\underline{v}_\omega$;
   - iii) die Zentralachse der Bewegung $\zeta$.
   - iv) Welcher momentane Bewegungszustand liegt vor?



# Prüfungsaufgaben

i) Standard Starrkörperformel Aufgabe:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AC} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ -2v \end{pmatrix} + \frac{v}{L}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} v + \frac{v}{L}\begin{pmatrix} L \\ -2L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-2 \\ -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} v = \underline{v}_C$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Prüfungsaufgaben

ii)

$$\underline{v}_\omega = (\underline{v}_A \cdot \underline{e}_\omega) \cdot \underline{e}_\omega$$

$$\underline{e}_\omega = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v/L}{\sqrt{4+1}\, v/L} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_\omega = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} v \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_\omega = \cancel{\frac{1}{5} (5)} v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v = \underline{v}_\omega}}$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Prüfungsaufgaben

### Bestimmung der Zentralachse

1. Geg.: Beliebiger Punkt $B$ mit bekannter Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$
2. Invariante $\underline{v}_\omega$ bestimmen: $\underline{v}_\omega = (\underline{v}_B \cdot \underline{e}_\omega) \cdot \underline{e}_\omega$ mit $\underline{e}_\omega = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$
3. Unbekannter Punkt $Z = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix}$ auf Zentralachse $\zeta$ $(\underline{v}_z = \underline{v}_\omega)$
4. Starrkörperformel mit beliebigem Punkt $B$ aufstellen: $\underline{v}_Z = \underline{v}_\omega = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BZ}$
5. Formel nach $z_x, z_y, z_z$ auflösen → meistens bleiben zwei Unbekannte bestehen
6. Für eine der Unbekannten einen Wert wählen (Eine Unbekannte frei wählbar)
7. Zweite Unbekannte nun berechnen
8. Zentralachse: $\zeta = \underline{Z} + \lambda \cdot \underline{\omega} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ mit frei wählbarem Parameter $\lambda$



iii) mit Zentralachsen-Rezept:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_\omega = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP}$$

$$\begin{pmatrix} 2v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ -2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v/L \\ v/L \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x - 2L \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ -2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_z\, v/L \\ 2P_z\, v/L \\ 2P_y v/L - \frac{v}{L}(P_x - 2L) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_z \\ 2P_z \\ 2P_y - P_x + 2L \end{pmatrix} \frac{1}{L} \rightarrow \boxed{P_z = 0}$$

$$\cancel{2} = \frac{2P_y}{L} - \frac{P_x}{L} + \cancel{2}$$

$$\boxed{P_x = 2P_y}$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 2P_y \\ P_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_y = 0$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta : \underline{r}(\rho) = \underline{0} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallel zu $\underline{\omega}$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Prüfungsaufgaben

POLYBOX

iv)

$\underline{\omega} \neq 0 \wedge \underline{v}_{\omega} \neq 0 \Rightarrow$ momentane Schraubung



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

# Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme