Schnellübung 5

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

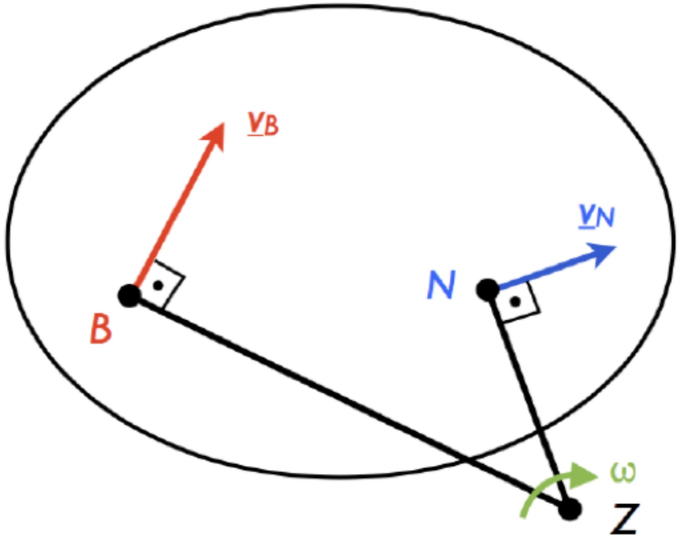
Einführung Schnellübung 5

POLYBOX

Satz vom Momentanzentrum

Eine Bewegung mit $\underline{\omega} \neq 0$ in der Ebene beschreibt stets eine momentane Rotation um das Momentanzentrum Z. Bei einer ebenen Bewegung wird die Schnelligkeit folgendermassen berechnet:

$v_N = \omega \cdot r$ wobei $r = |\underline{ZN}|$ und $v_Z = 0$



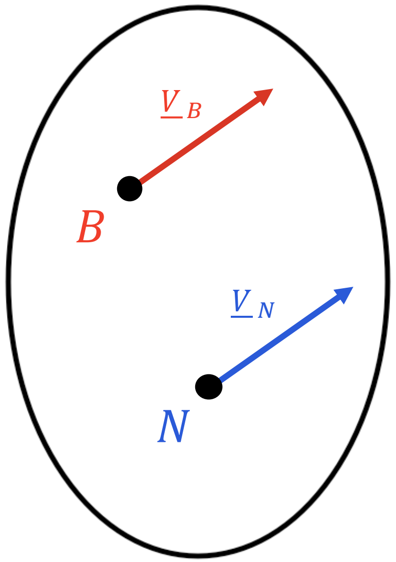
Der Schnittpunkt der Orthogonalen auf die Geschwindigkeitsvektoren entspricht der Position des Momentanzentrums Z

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

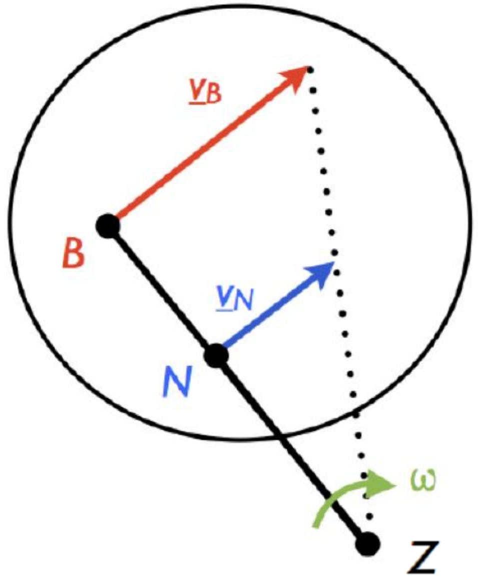
Einführung Schnellübung 5

Sonderfälle für ebene Bewegung

Gleiche Geschwindigkeitsvektoren
→ Translation, Z im Unendlichen



Geschwindikeit $\underline{v}_N || \underline{v}_B$ und $\underline{v}_N \neq \underline{v}_B$
→ Z ist Schnittpunkt der Orthogonalen und der Verbindungslinie der Vektorspitzen



POLYBOX

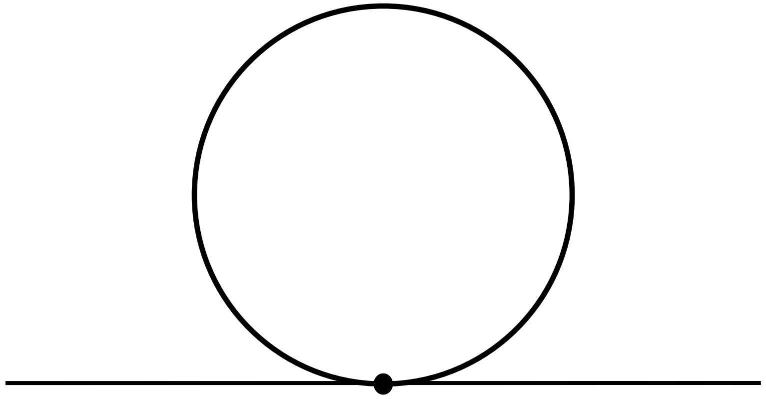
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 5

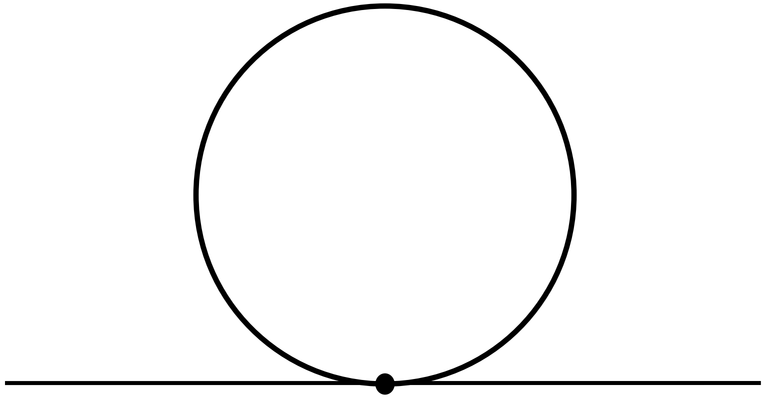
POLYBOX

Rollen und Gleiten

Körper rollt auf ruhendem Körper
→ materielle Berührungspunkte des rollenden Körpers haben Geschwindigkeit $\underline{v} = 0$



Körper gleitet auf ruhendem Körper
→ materielle Berührungspunkte des gleitenden Körpers haben Geschwindigkeit $\underline{v} \neq 0$, wobei $\underline{v}$ tangential zur Berührungsebene



Körper rollt auf nicht ruhendem Körper
→ In diesem Fall sind die Geschwindigkeiten der Berührungspunkte ebenfalls identisch, aber ungleich Null

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 5

POLYBOX

Aufgabe 1

- Geometrisches (anschauliches) Vorgehen als Alternative zum rechnerischen Vorgehen

Schnellübung 5

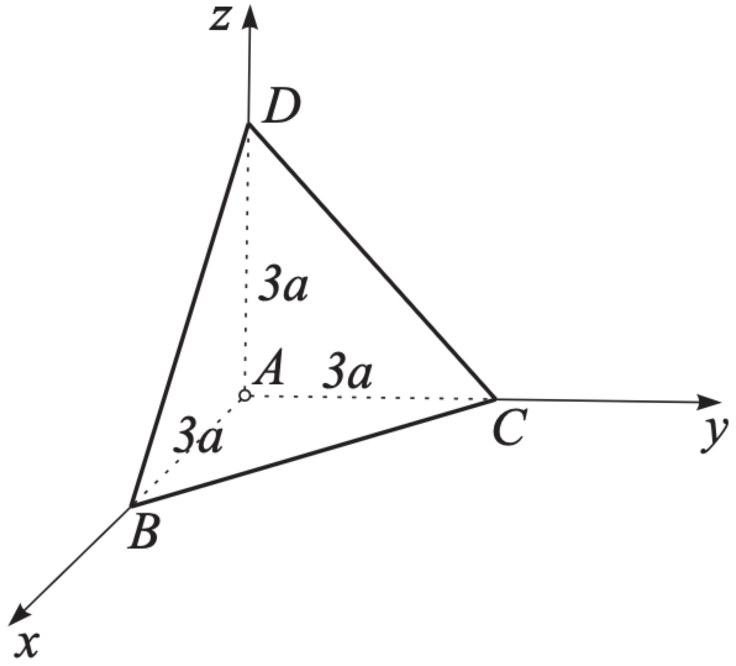
POLYBOX

Das starre Tetraeder $ABCD$ mit drei von A ausgehenden, zueinander normalen Kanten (Länge $3a$) rotiert um eine zu AD parallele Achse. Die Geschwindigkeit im Punkt D ist $\underline{v}_D = v\,\underline{e}_x$ und die y-Komponente der Geschwindigkeit von B ist v.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\underline{v}_B$ und die Kinemate in C.

b) Bestimmen Sie die Rotationsachse μ und geben Sie sie in Parameterform an.

c) Finden Sie den Punkt mit maximaler Schnelligkeit und geben Sie diese Schnelligkeit an.



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. Starrkörperformel zwischen B und D aufstellen
2. Für ω, $v_{B,x}$ und $v_{B,z}$ lösen

1. geg.:

Parallel

$\underline{u} \parallel \underline{AD} \Rightarrow \underline{\omega} \parallel \underline{AD} \Rightarrow \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$\underline{v}_D = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_B = \begin{pmatrix} v_{B,x} \\ v \\ v_{B,z} \end{pmatrix}$

a) Starrkörperformel:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_D + \underline{\omega} \times \underline{DB} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3a \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{B,x} \\ v \\ v_{B,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3a\omega \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_{B,x} = v, \quad v_{B,z} = 0$$

$\rightarrow 3a\omega = v$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{3a}}$$

$$\underline{v}_B = \begin{pmatrix} v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

POLYBOX

3. $\underline{v}_C$ mit Starrkörperformel bestimmen

Kinematik in C:

$\{\underline{v}_c, \underline{\omega}\}$

↳ haben wir!

↳ brauchen wir!

$$\underline{v}_c = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BC} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{3a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_c = \begin{pmatrix} v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\underline{v}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\left\{ \underline{0}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{3a} \end{pmatrix} \right\}}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

1. $\underline{C}$ als Referenzpunkt und $\underline{e_\omega}$ als Richtungsvektor in Geradengleichung setzen

b) Wir kennen bereits einen Punkt auf μ!

↳ $\underline{C}$, da $\underline{v}_c = \underline{0}$

Und wir kennen $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{3a} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e}_\omega = \underline{e}_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ genug für vollst. Beschreibung von μ:

$\mu: r(\lambda) = \underline{C} + \lambda \underline{e}_\mu$

$$\mu: r(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1.

POLYBOX

1. Weitester Punkt bestimmen
2. Schnelligkeit durch Betrag von Geschwindigkeit berechnen

c) Weitester Punkt von $\mu \Rightarrow \underline{B}$

$$\dot{s}_B = |\underline{v}_B| = \sqrt{v^2 + v^2 + 0} = \sqrt{2}\, v$$

$$\underline{\underline{\dot{s}_B = \sqrt{2}\, v}}$$

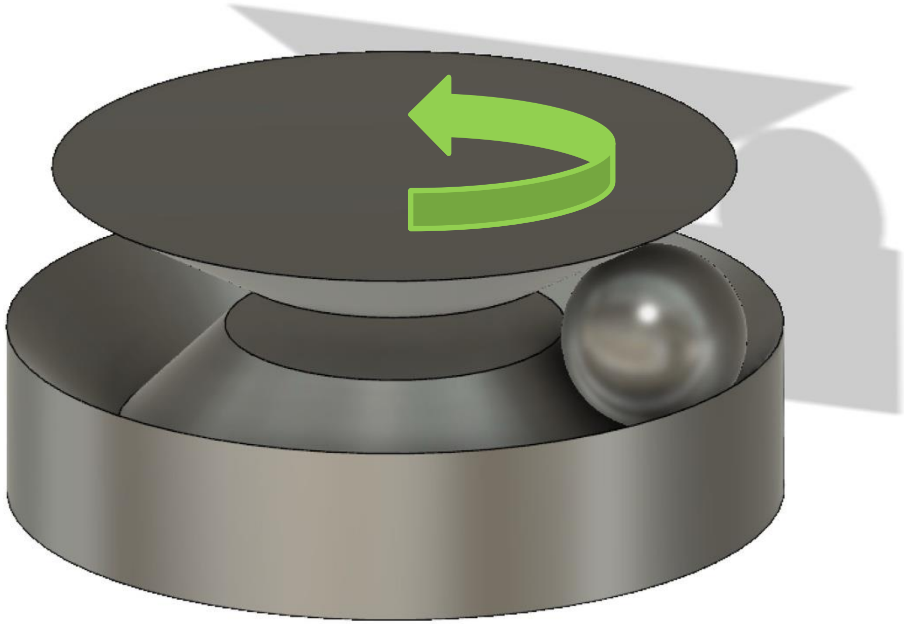
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 5

POLYBOX

Aufgabe 2

- 3 verschiedene Körper → 3 verschiedene $\underline{\omega}$
- Welche momentane Bewegung führen die Körper aus?

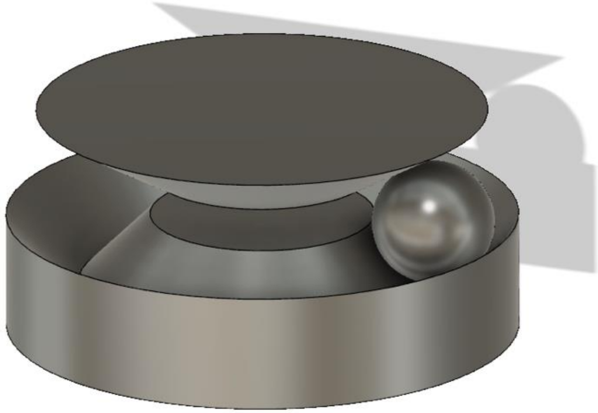


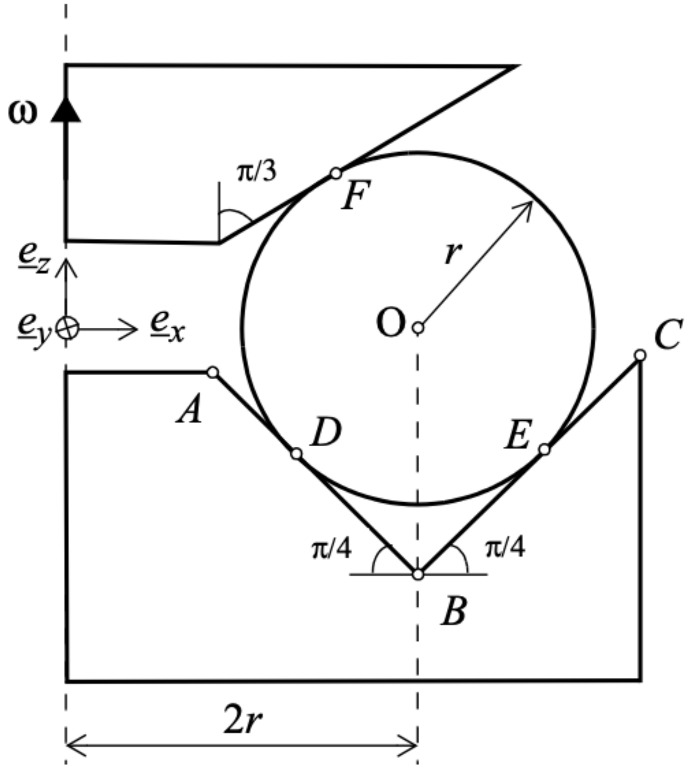
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 5

POLYBOX

Eine Kugel (Radius r) rollt auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Öffnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\underline{e}_z$ drehenden Welle ab. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$. Berechnen Sie die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt.

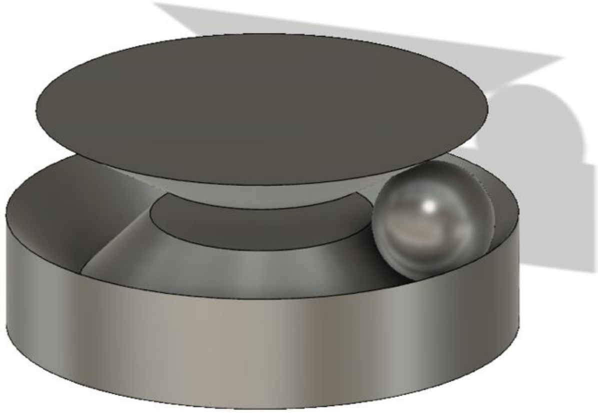


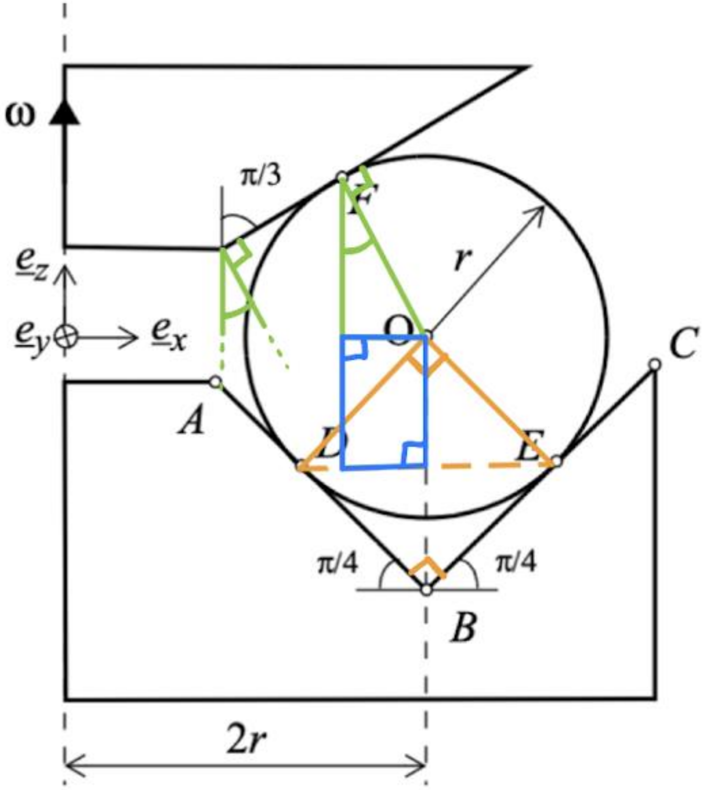


IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 5

Eine Kugel (Radius r) rollt auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Öffnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\underline{e}_z$ drehenden Welle ab. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$. Berechnen Sie die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt.





POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. durch Geometrie $\underline{v_F}$ bestimmen
2. durch Geometrie $\underline{\omega_K}$ bestimmen

2.

geg.:

$\underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$, Geometrie

ges.:

$\{\underline{v}_O ; \underline{\omega}_K\}$

Plan:

$\alpha \to a \to d \to \underline{v}_F \to b \to c \to \underline{\omega}_K \to \underline{v}_O$

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$a = r\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{2}$$

$$d = 2r - \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

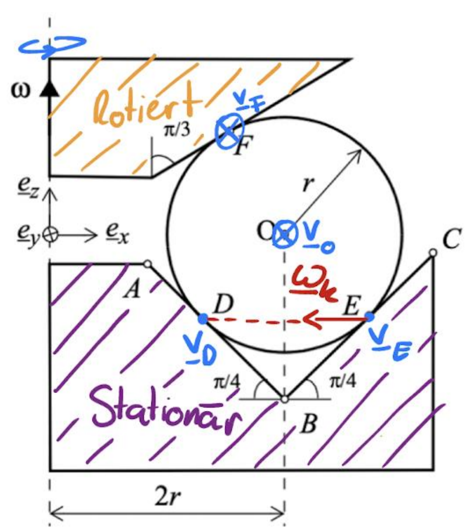
$$\underline{v}_F = \frac{3r}{2}\cdot|\underline{\omega}|\cdot\underline{e}_y = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\omega r\\0\end{pmatrix}$$

$$b = r\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

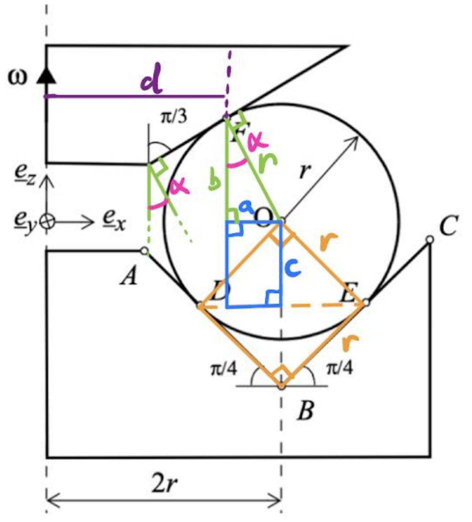
$$c = r\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$\underline{\omega}_K = \frac{|\underline{v}_F|}{b+c}(-\underline{e}_x)$$

Geschwindigkeiten



Geometrie



POLYBOX

Lösung 2.

3. durch Geometrie $\underline{v}_O$ bestimmen
4. $\underline{v}_O$ vereinfachen

$$\underline{\omega}_k = \frac{\frac{3}{\cancel{2}}\omega \cancel{r}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{r} + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cancel{r}}(-\underline{e}_x) = \frac{-3\omega}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\underline{e}_x = \frac{-3\omega}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_O = c\cdot|\underline{\omega}_k|\cdot\underline{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}r\cdot\frac{3\omega}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\underline{e}_y = \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\omega r\underline{e}_y$$

Vereinfachen...

erweitern

$$\underline{v}_O = \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega r\underline{e}_y\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)}_{=1} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega r\underline{e}_y\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}$$

3. binom. Formel

$$\underline{v}_O = \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega r(\sqrt{3}-\sqrt{2})\underline{e}_y$$

$$\underline{v}_O = \frac{3}{\sqrt{2}}\omega r(\sqrt{3}-\sqrt{2})\underline{e}_y = 3\omega r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\underline{e}_y$$

$$\underline{v}_O = 3\omega r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\underline{e}_y$$

Kinemate in O:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\3\omega r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-\frac{3\omega}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 5

POLYBOX

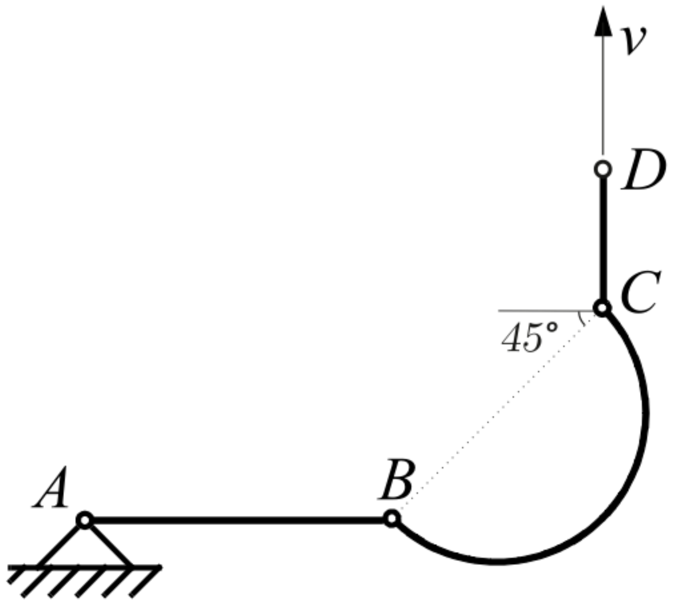
Aufgabe 3

- Satz der projizierten Geschwindigkeiten
- 2 Fälle

Schnellübung 5

POLYBOX

Die drei starren Stäbe AB, BC und CD sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab BC ist ein Halbkreis mit Radius R. Die Schnelligkeit vom Punkt B beträgt $|\underline{v}_B| = v$. Vom Punkt D weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene.
Was für eine Bewegung beschreibt der Stab BC momentan?



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. Zwei Fälle unterscheiden
2. durch Satz der projizierten Geschwinfigkeiten (S.d.p.G) im Stab $\underline{CD}$, $V_{C,y}$ Bestimmen

3.

geg.: $\underline{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \ |\underline{v}_B| = v \xrightarrow[\text{bei } \underline{AB}]{\text{S.d.p.G}} \underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm v \\ 0 \end{pmatrix}$

2 Fälle:

(I) $\underline{v}_B = v\underline{e}_y$

(II) $\underline{v}_B = -v\underline{e}_y$

I:

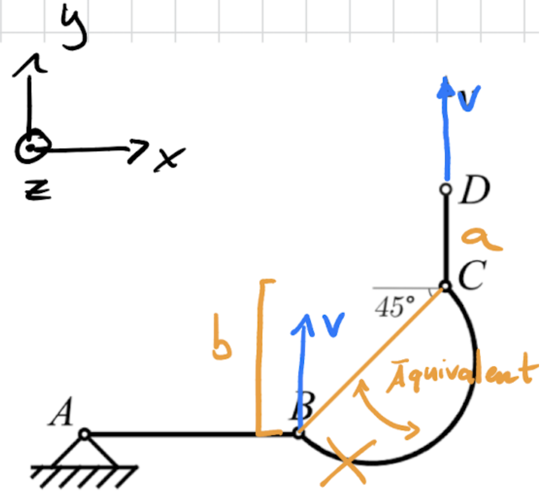
$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C \, \underline{CD} = \underline{v}_D \, \underline{CD}$$

$$\begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{C,y} \cancel{a} = v \cancel{a}$$

$$\boxed{v_{C,y} = v}$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

3. mit S.d.p.G im Stab $\underline{BC}$, $V_{C,x}$ Bestimmen
4. Translation erkennen

$$\underline{v}_C \cdot \underline{BC} = \underline{v}_B \cdot \underline{BC}$$

$$\begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{C,x} b + \cancel{vb} = \cancel{vb}$$

$$\boxed{v_{C,x} = 0}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}_B \rightarrow \underline{BC} \text{ macht eine mom. Translation!}$$

5. Wieder mit S.d.p.G $V_{C,y}$ bestimmen
6. mit S.d.p.G im Stab $\underline{BC}$, $V_{C,x}$ Bestimmen
7. Rotation erkennen

II:

gleich wie I

$$\underline{v}_C \cdot \underline{CD} = \underline{v}_D \cdot \underline{CD} \rightarrow (\dots) \rightarrow v_{C,y} = v$$

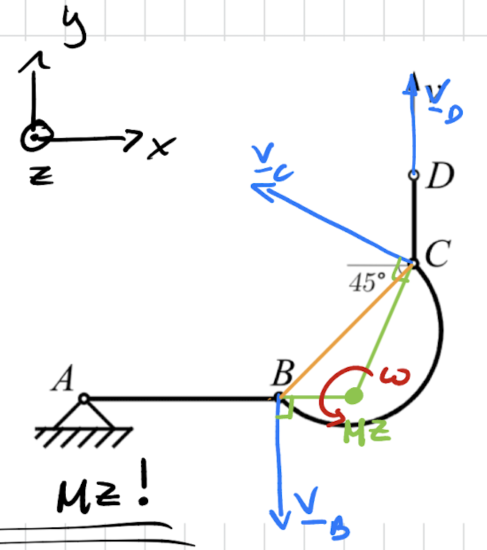
$$\underline{v}_C \cdot \underline{BC} = \underline{v}_B \cdot \underline{BC}$$

$$\begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{C,x} \cancel{b} + v\cancel{b} = -v\cancel{b}$$

$$v_{C,x} = -2v$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} -2v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$



Rotation um Mz!

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 5

POLYBOX

Aufgabe 1

- Achse = Mittellinie durch Zylinder
- Rollbewegung

Aufgabe 2

- Kugel in Ruhe

Aufgabe 3

- Suche Punkt mit konstanter Schnelligkeit für Umdrehungszeit

IMES

Institute for Mechanical Systems

Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme