POLYBOX

Schnellübung 6

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

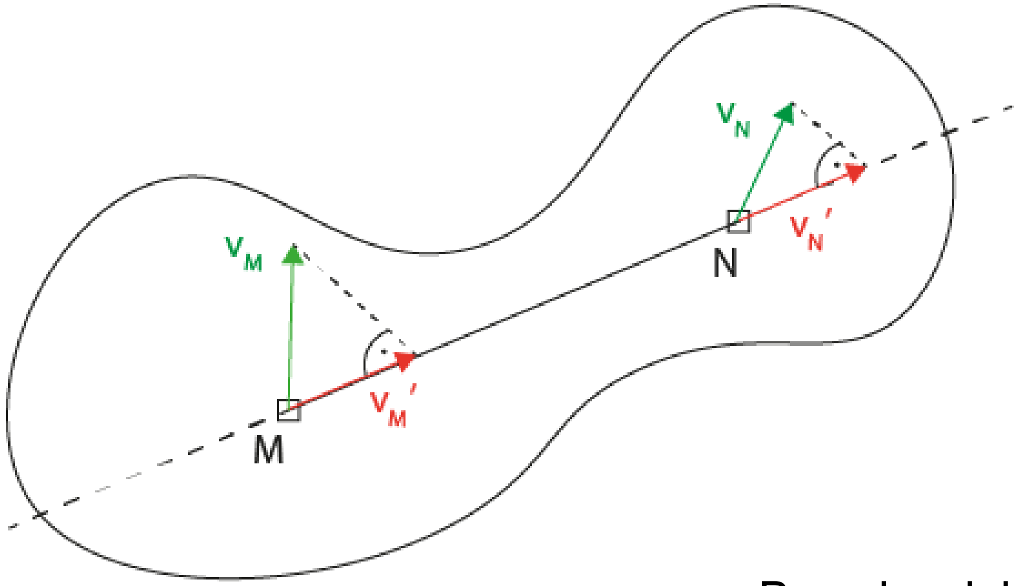
HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 6

WH: Satz der projizierten Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeiten $\underline{v}_M, \underline{v}_N$ zweier beliebiger Punkte M und N eines starren Körpers haben zu jedem Zeitpunkt die gleichen Projektionen $\underline{v}_M' = \underline{v}_N'$ auf ihre Verbindungsgerade MN



Beweis, siehe Vorlesung

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

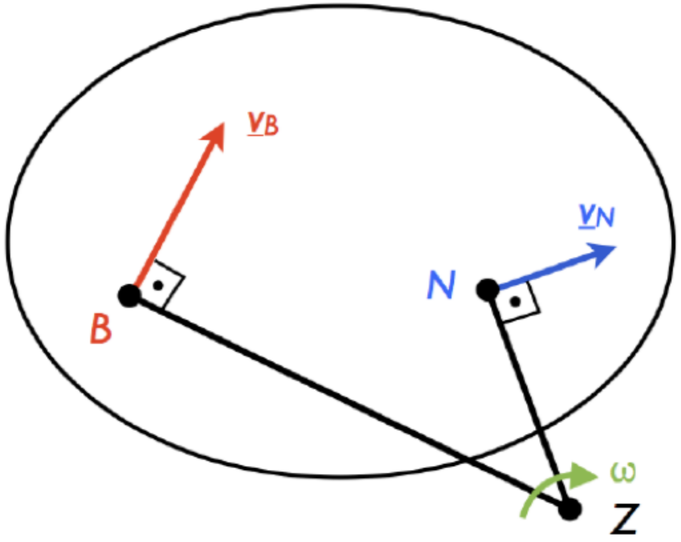
Einführung Schnellübung 6

POLYBOX

WH: Satz vom Momentanzentrum

Eine Bewegung mit $\underline{\omega} \neq 0$ in der Ebene beschreibt stets eine momentane Rotation um das Momentanzentrum Z. Bei einer ebenen Bewegung wird die Schnelligkeit folgendermassen berechnet:

$$v_N = \omega \cdot r \qquad \text{wobei } r = |\underline{ZN}| \text{ und } v_Z = 0$$



Der Schnittpunkt der Orthogonalen auf die Geschwindigkeitsvektoren entspricht der Position des Momentanzentrums Z

Beweis, siehe Vorlesung

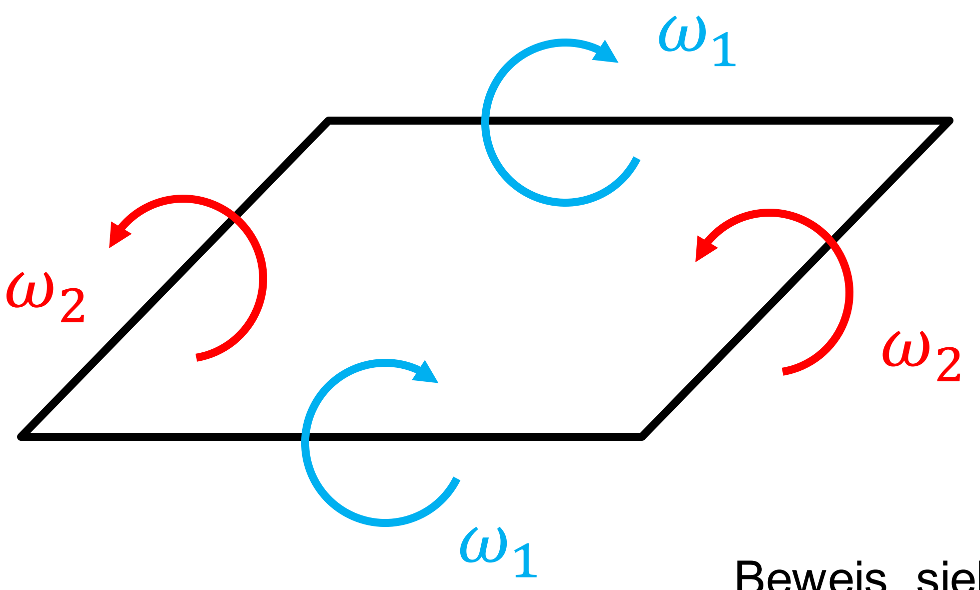
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 6

POLYBOX

Parallelogrammregel

In einem Parallelogramm bestehend aus vier gelenkig verbundenen Stäben gilt:
Gegenüberliegende Stäbe haben die gleiche Rotationsgeschwindigkeit (Betrag und Drehsinn)



Beweis, siehe Vorlesung

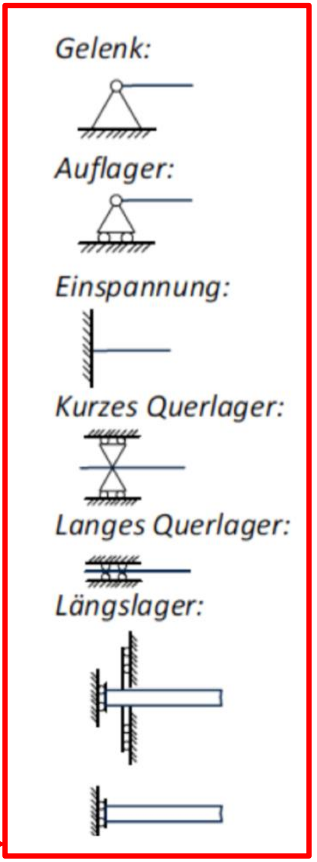
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 6

Lagerungen/Bindungen

Lager sind abstrakte Darstellungen zur Charakterisierung von Bauteilverbindungen.

Lager sperren bestimmte Bewegungen. Welche?



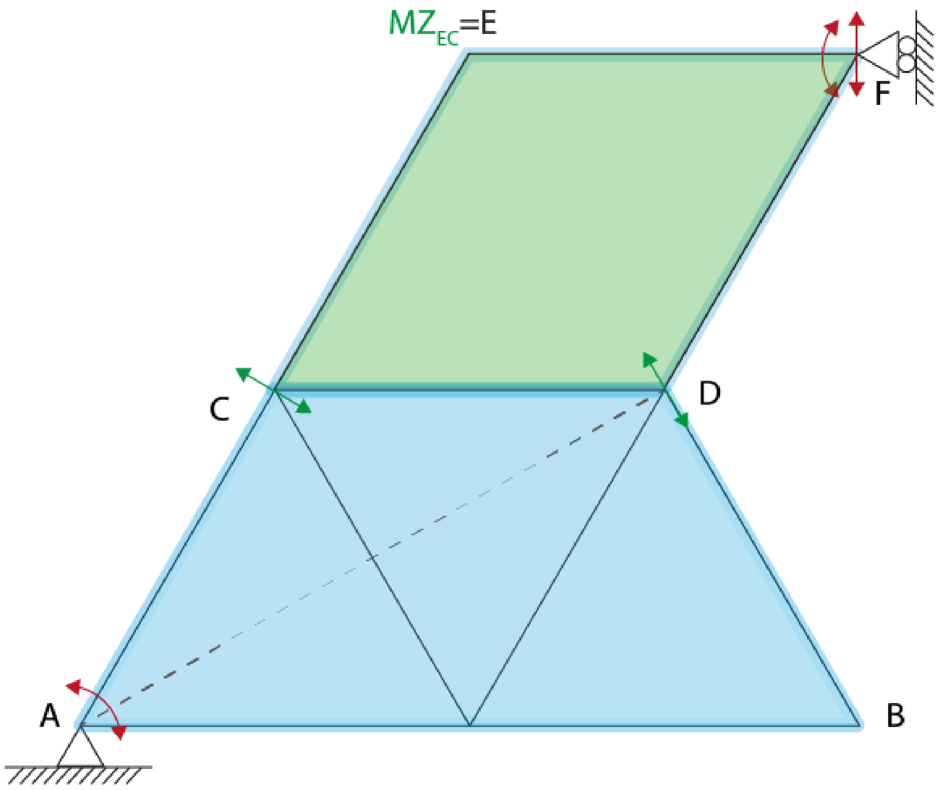
Andere Darstellungen möglich

Einführung Schnellübung 6

Ebene Fachwerke

Vorgehen:

1) Starre Körper identifizieren
   Bereiche, die nur aus Dreiecken bestehen (ABCD)
   Einzelne starre Stäbe (CE, EF, DF)
   Andere starre Körper
2) Identifikation der Lagerung
   Festlager, wie in A: Drehbar
   Auflager, wie in F: Drehbar und entlang Auflagefläche verschiebbar
3) ω_i und MZ_i aller Starrkörper finden
   Satz vom Momentanzentrum $v = \omega \cdot r$
   Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
   Parallelogrammregel ($\omega_{DF} = \omega_{CE}, \omega_{CD} = \omega_{EF}$)

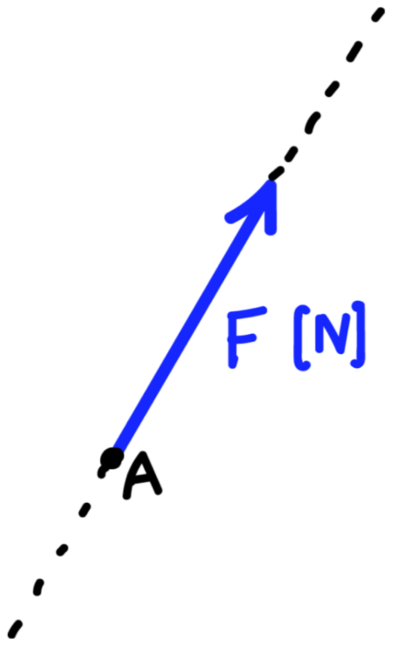


Einführung Schnellübung 6

Kraft

Charakterisiert durch:

- Angriffspunkt A
- Richtung
- Betrag (in Newton [N])



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

Einführung Schnellübung 6

Moment

- Definition: $\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{OA} \times \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}} \times \underline{AO}$

- Das Moment einer Kraft wird verwendet, um die Leistung der Kraft bei einer Rotation zu berechnen.

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 6

Leistung

Leistung einer Kraft

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

Leistung einer Kräftegruppe bei einer Starrkörperbewegung

$$P = \sum_i \underline{F_i} \cdot \underline{v_i}$$

oder

$$P = \underline{R} \cdot \underline{v_O} + \underline{M_O} \cdot \underline{\omega}$$

$\underline{R}$: Resultierende der Kräftegruppe

$$\underline{R} = \sum_i \underline{F_i}$$

$\underline{M_O}$: Moment der Kräftegruppe bezüglich Punkt O

$$\underline{M_O} = \sum_i \underline{OA_i} \times \underline{F_i}$$

POLYBOX

Tipps Schnellübung 6

POLYBOX

Aufgabe 1
Hinweis: Kein ideales Fachwerk
Das Gelenk E liegt auf Stab OB und Stab AC (Prinzip einer Schere)
Einfacher, wenn komponentenweise berechnet ($v_{D,x}$ und $v_{D,y}$)

Schnellübung 6

POLYBOX

Aufgabe 1

Das abgebildete System besteht aus vier starren, gelenkig miteinander verbundenen Stäben (Längen: OB $= AC = 2l$, $BD = CD = l$). Anders als bei idealen Fachwerken sind die Stäbe OB und AC in ihrem Mittelpunkt E miteinander gelenkig verbunden. Stab OB ist in O gelenkig gelagert. Der Punkt A des Stabes AC bewege sich momentan mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = v\underline{e}_x$.

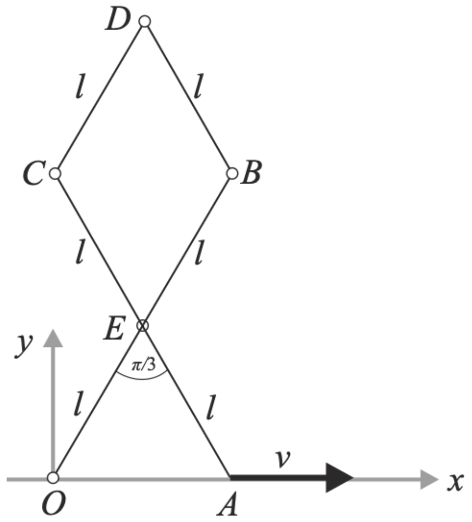
Ermitteln Sie:

a) Die Drehgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ des Stabes OB.

b) Das Momentanzentrum des Stabes AC und die Geschwindigkeit $\underline{v}_C$ von C.

c) Das Momentanzentrum des Stabes BD.

d) Die Geschwindigkeit $\underline{v}_D$ von D.



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. a)

1. Richtung von $\underline{v}_E$ mit S.d.p.G. auf Stab $\underline{OE}$ finden

POLYBOX

1.a)

"Senkrecht auf..."

$$\underline{v}_E \perp \underline{OE}\ !$$

$$\underline{v}_E\,\underline{OE} = \overset{=0}{\underline{v}_O}\,\underline{OE} \to \overbrace{\underline{v}_E\,\underline{OE} = 0}^{\underline{v}_E \perp \underline{OE}}$$

$$\underline{v}_E = \dot{s}_E\,\underline{e}_{v_E}$$

- $\underline{e}_{v_E}$ finden:

$$\dot{s}_E\,\underline{e}_{v_E}\,\underline{OE} = 0$$

$$\cancel{\dot{s}_E}\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cancel{l}\cos\frac{\pi}{3} \\ \cancel{l}\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\cancel{2} \\ \sqrt{3}/\cancel{2} \end{pmatrix} = 0$$

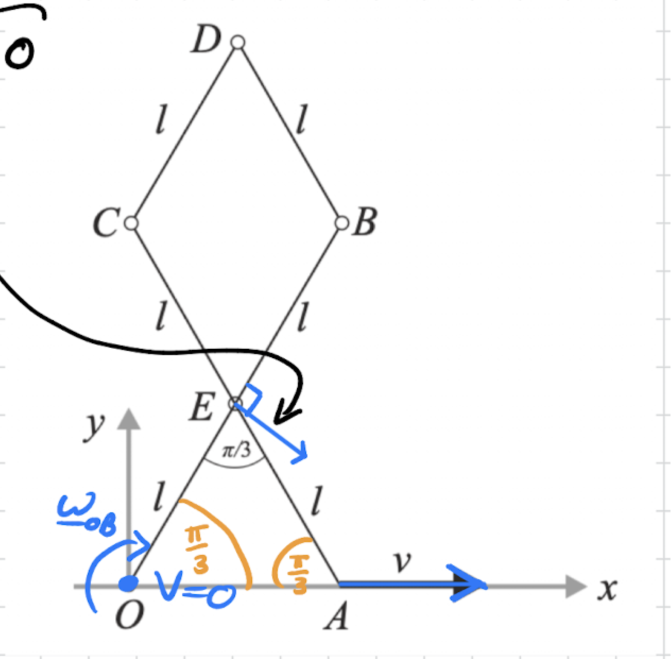
$$e_x + \sqrt{3}\,e_y = 0$$

$$e_x = -\sqrt{3}\,e_y \quad \Rightarrow \quad \underline{e}_{v_E} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,e_y \\ e_y \end{pmatrix} \to |\underline{e}_{v_E}| \overset{!}{=} 1$$

$$|\underline{e}_{v_E}| = \sqrt{3e_y^2 + e_y^2} = 2e_y \overset{!}{=} 1 \to e_y = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\underline{e}_{v_E} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

alternativ auch geom. lösen



Lösung 1. a)

2. Schnelligkeit von $\underline{v}_E$ mit S.d.p.G. auf Stab $\underline{AE}$ finden
3. MZ von Stab OB finden
4. $\underline{\omega}_{OB}$ mit Satz vom Momentanzentrum finden

- $\dot{S}_E$ finden:

$$\dot{S}_E \, \underline{e}_{v_E} \cdot \underline{AE} = \underline{v}_A \cdot \underline{AE}$$

$$\dot{S}_E \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cancel{l} \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{l} \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$\dot{S}_E \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = v\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$\dot{S}_E \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -v$$

$$\boxed{\dot{S}_E = -\frac{v}{\sqrt{3}}}$$

↳ $\underline{v}_E = -\frac{v}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{v}{2}$

- MZ von Stab OB finden:

↳ MZ liegt auf $\underline{O}$ da $\underline{v}_O = \underline{0}$

- $\underline{\omega}_{OB}$ finden:

$$|\dot{S}_E| = |\underline{\omega}_{OB}| \cdot |\underline{OE}| \Rightarrow \underline{\omega}_{OB} = \frac{|\dot{S}_E|}{|\underline{OE}|} \cdot (-\underline{e}_z)$$

$$\underline{\omega}_{OB} = \frac{v/\sqrt{3}}{l} (-\underline{e}_z)$$

$$\underline{\underline{\underline{\omega}_{OB} = -\frac{v}{\sqrt{3}\, l} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. b)

1. MZ liegt im Schnittpunkt der Senkrechten von $\underline{v}_A$ und $\underline{v}_E$
2. $\underline{\omega}_{AC}$ mit Satz vom MZ bestimmen
3. $\underline{v}_C$ mit $\underline{\omega}_{AC}$ bestimmen

b)

- MZ Graphisch bestimmen
  ↳ auf Punkt $\underline{B}$

$$\underline{\omega}_{AC} = \frac{|\dot{s}_E|}{|EB|}\,\underline{e}_z = \frac{v/\sqrt{3}}{l}\,\underline{e}_z$$

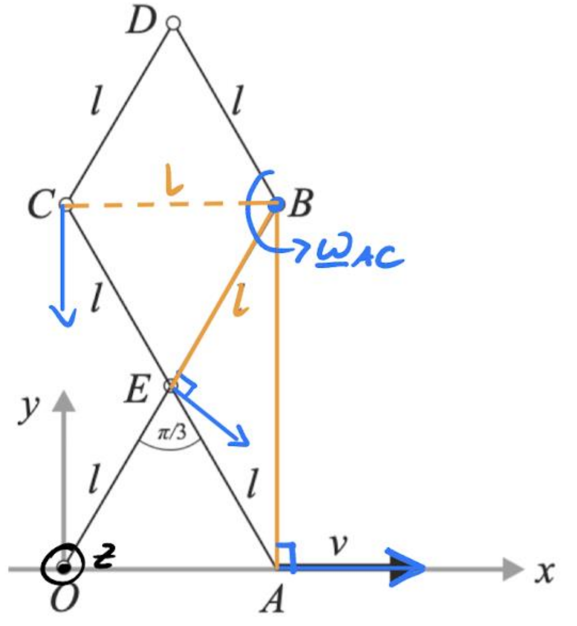
$$\underline{\omega}_{AC} = \frac{v}{\sqrt{3}\,l}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C = \dot{s}_C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\dot{s}_C = |\omega_{AC}|\cdot|BC| = \frac{v}{\sqrt{3}\,l}\cdot l$$

$$\dot{s}_C = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix}0\\-\frac{v}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. c)

1. $\underline{\omega}_{BD}$ mit Parallelogrammregel bestimmen
2. Position von $\underline{Z}_{BD}$ mit Satz vom MZ bestimmen

c) Parallelogrammregel:

$\underline{\omega}_{BD} = \underline{\omega}_{AC}$

1. → $\underline{Z}_{BD}$ muss sich auf der gelben Linie befinden um S.d.p.G. mit $\underline{v}_B$ zu erfüllen

2. → $\underline{Z}_{BD}$ muss über $\underline{B}$ liegen, damit $\underline{\omega}_{BD} = \underline{\omega}_{AC}$ erfüllt wird.

$|\underline{\omega}_{BD}| = \dot{S}_B / x$

$x = \dot{S}_B / |\underline{\omega}_{BD}|$

$\dot{S}_B = |\underline{\omega}_{OB}| \cdot |\underline{OB}| = \frac{v}{\sqrt{3}L} \cdot 2L$

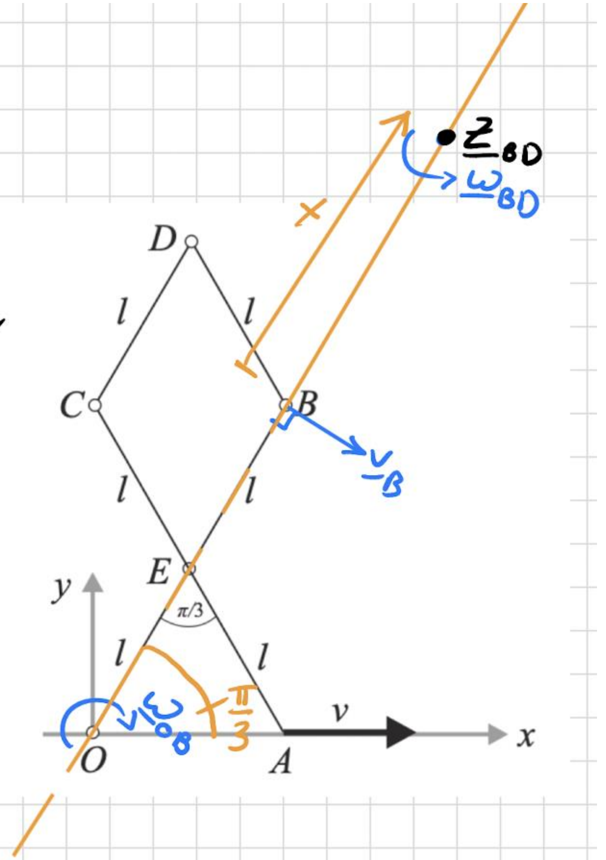
$\dot{S}_B = \frac{2v}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{2\cancel{v}/\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{v}/\cancel{\sqrt{3}}L} = 2L$

$x = 2L$

$$\underline{Z}_{BD} = \begin{pmatrix} (2L+x)\cos\frac{\pi}{3} \\ (2L+x)\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = 4L \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{Z}_{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} L}}$$



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

Lösung 1. d)

1. $\underline{v}_D$ mit Starrkörperformel zwischen $\underline{ZD}$ bestimmen

d)

$$\underline{v}_D = \underline{\omega}_{BD} \times \underline{ZD}$$

$$\underline{ZD} = \begin{pmatrix} L\cos\frac{\pi}{3} - 2L \\ 3L\sin\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} L$$

$$\underline{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{\sqrt{3}L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/2 \\ -3v/2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/2 \\ -\sqrt{3}v/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_D = \frac{1}{2}v \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 6

POLYBOX

Aufgabe 2
Siehe Definition für Gesamtleistung
Empfehlung: Verwendung von folgender Formel:

$$P = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i$$

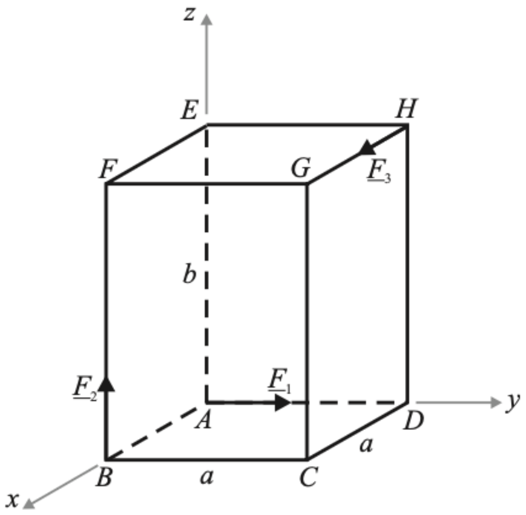
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 6

POLYBOX

Aufgabe 2

Ein starrer Quader (Kantenlängen $AB = AD = a$, $AE = b$) besitzt die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega} = (0, \omega, \omega)$; die Ecke C hat die Geschwindigkeit $\underline{v}_C = (-a\omega, 2a\omega, -2a\omega)$. In den Ecken A, B, und H greifen die Kräfte $\underline{F}_1 = F\underline{e}_y$, $\underline{F}_2 = F\underline{e}_z$ und $\underline{F}_3 = F\underline{e}_x$ an.
Wie muss b bei gegebenem a gewählt werden, damit die Gesamtleistung der drei Kräfte verschwindet?
Hinweis: Man berechne die Gesamtleistung als Summe der Leistungen jeder Kraft.



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

1. Leistung $P = 0$ setzen
2. $\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ und $\underline{v}_H$ mit Starrkörperformel bestimmen
3. $P = 0$ nach b auflösen

2.

$$P \overset{!}{=} 0$$

$$P = \underline{v}_A \underline{F}_1 + \underline{v}_B \underline{F}_2 + \underline{v}_H \underline{F}_3 \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CA} = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_A = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\omega \\ -a\omega \\ a\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_H = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(b-a) \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega(b-a) \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$P = \cancel{a\omega F} - 2a\cancel{\omega F} + b\cancel{\omega F} - \cancel{a\omega F} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 2a}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 6

Aufgabe 3

Wie bewegt sich Punkt A?

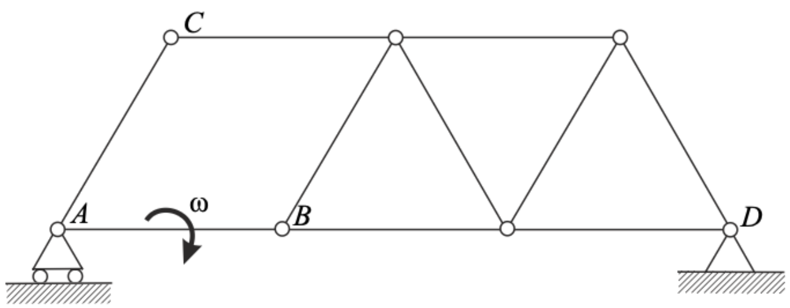
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 6

POLYBOX

Aufgabe 3

Das in der Skizze dargestellte Fachwerk besteht aus mehreren starren Stäben gleicher Länge, welche reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab AB rotiert momentan mit der Winkelschnelligkeit ω.
In welche Richtung rotiert der Stab AC? Wie gross ist seine Winkelschnelligkeit?



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. Rechten Starrkörper identifizieren
2. Erkennen dass $\underline{v}_A = 0$ gilt, da $\underline{v}_B$ senkrecht auf $\underline{AB}$ steht
3. Daher ist $\underline{A}$ MZ von $\underline{AB}$ und $\underline{AC}$
4. $\underline{v}_B$ mit Satz vom MZ bestimmen
5. $\underline{\omega}_{BD}$ mit Satz vom MZ bestimmen
6. $\underline{\omega}_{AC}$ mit Parallelogrammregel bestimmen

3.

$$\underline{v}_B = |\underline{\omega}_{AB}| \cdot |\underline{AB}| (-\underline{e}_y)$$

$$\underline{v}_B = \omega L \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega L \end{pmatrix}$$

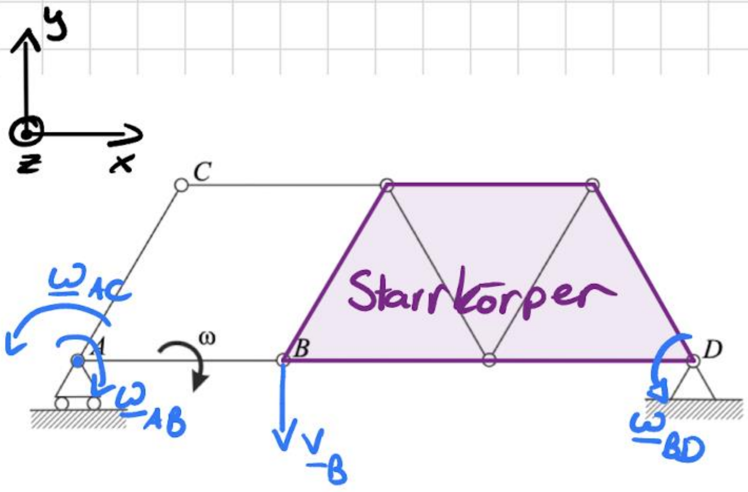
$$\underline{\omega}_{BD} = \frac{|\underline{v}_B|}{|\underline{BD}|} \underline{e}_z$$

$$\underline{\omega}_{BD} = \frac{\omega L}{2L} \underline{e}_z = \frac{1}{2} \omega$$

Parallelogrammregel:

$$\underline{\omega}_{AC} = \underline{\omega}_{BD}$$

$$\underline{\omega}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega/2 \end{pmatrix}$$



Tipps Hausübung 6

POLYBOX

Aufgabe 1
<u>Hinweis in Aufgabe:</u>
SdpG und/oder Satz vom Momentanzentrum anwenden

Aufgabe 2
Siehe Kolloquium

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback