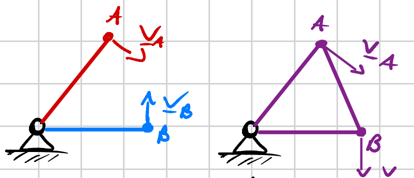
Theorie

Wie löst man 2D-Kinematik Aufgaben mit Fachwerken?

Step-by-step Guide:

• 1: Starrkörper identifizieren

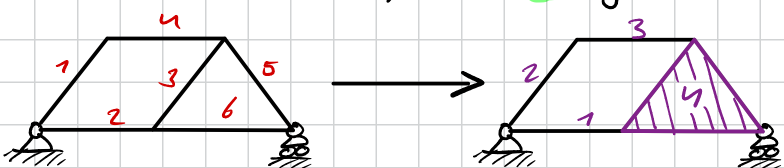
Alle Dreiecke in einem Fachwerk formen automatisch einen gemeinsamen Starrkörper:



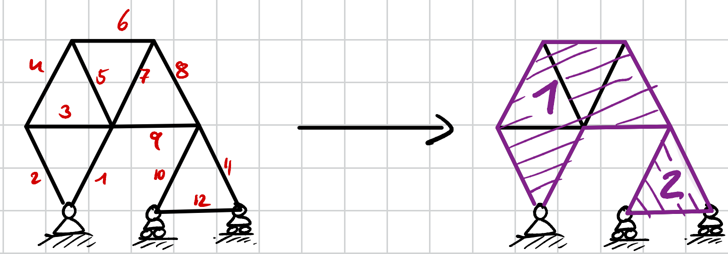
2 Starrkörper   1 Starrkörper

• Tipp: Schraffier alle Starkörper um sie ersichtlicher zu machen!

Jeder Starrkörper hat sein eigenes MZ. Reduziert man also die Anzahl Starrkörper, hat man weniger MZ zu bestimmen!



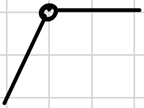
6 Starrkörper?!   4 Starrkörper!



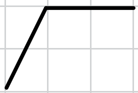
12 Starrkörper??   2 Starrkörper!!

Ausserdem hat es zwei Arten, Stäbe zu verbinden:

gelenkig und verschweisst



oder



2 Starrkörper

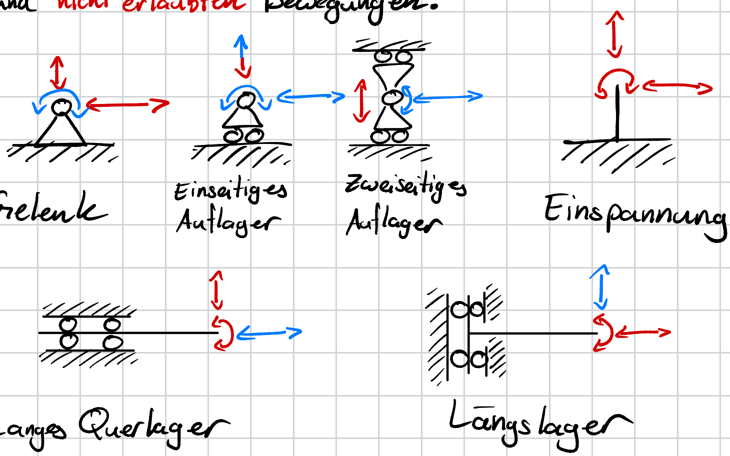
1 Starrkörper

Verschweisste Stäbe gelten automatisch als ein Starrkörper. In den allermeisten Fällen sind Stäbe aber gelenkig verbunden.

• 2: Lagerung bestimmen

Lager stellen symbolisch Verbindungsarten des Systems mit der Restlichen Welt dar. Sie schränken die erlaubten Bewegungszustände unseres Fachwerks ein.

Hier sind die meist gebrauchten Lagerungen inklusive ihrer erlaubten und nicht erlaubten Bewegungen:



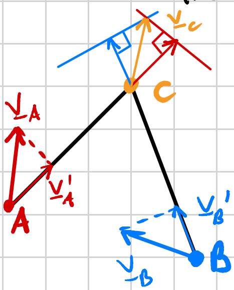
• 3: MZ und ω finden

Mit den gegebenen Geschwindigkeiten, können wir nun versuchen, alle (oder nur die Gesuchten) MZ und ω zu finden, um die Bewegung vollständig beschreiben zu können.

Dafür haben wir drei "Tools" zur verfügung:

- Satz der projizierten Geschwindigkeiten (S.d.p.G)
- Satz vom Momentanzentrum (Satz vom MZ)
- Parallelogrammregel

Der S.d.p.G. erlaubt uns die Geschwindigkeit eines Punktes mit den Geschwindigkeiten zwei anderer Punkte (die mit dem gesuchten Punkt über einen Starrkörper verbunden sind) zu bestimmen.

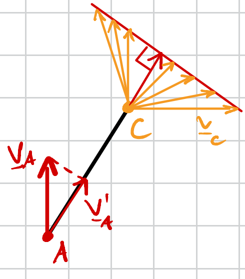


$\underline{v}_c \cdot \underline{BC} = \underline{v}_B \cdot \underline{BC}$

$\underline{v}_c \cdot \underline{AC} = \underline{v}_A \cdot \underline{AC}$

Zu bemerken, ist der Fakt, dass die Geschw. zwei verschiedener Punkte notig sind. Unten ist visualisiert, was passiert wenn wir nur eine Geschwindigkeit haben.

Wir können sehen, dass die Projektion aller eingezeichneter $\underline{v}_c$ auf $\underline{AC}$ gleich $\underline{v}_A'$ ist. Also fehlt uns noch ein "Stück" Information, um $\underline{v}_c$ Eindeutig bestimmen zu können. Sei es der Richtungsvektor, Betrag oder eine Komponente von $\underline{v}_c$.



Die wichtigste Schlussfolgerung des S.d.p.G ist dass das $\underline{v}$ eines Punktes immer senkrecht auf den Verbindungsvektor zum MZ steht. Kennt man also das MZ eines Starrkörpers, kann man automatisch die Richtung der Geschw. aller Punkte des Körpers einzeichnen (was ich sehr empfehle!)

Diese Schlussfolgerung bringt uns direkt zum Satz vom MZ $\dot{S} = \omega L$. Er beschreibt das Verhältnis zwischen der Rotationsgeschw. (ω), der Schnelligkeit eines Punktes ($\dot{S}$) und der Länge vom Verbindungsvektor (L) zwischen Punkt und MZ. Den Satz können wir in folgende Varianten umformen:

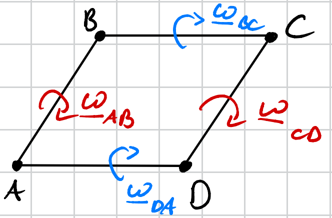
- $\dot{S} = \omega L$
- $\omega = \dot{S}/L$
- $L = \dot{S}/\omega$

Mit diesen drei Formen kann man einen der drei Werte mit den Anderen zwei Bestimmen.

Zusätzlich gibt es noch die Vektorielle Form vom Satz: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{L}$

Diese Form ist praktisch, wenn man direkt $\underline{v}$ anstatt von $\dot{S}$ haben will

Als letzes bleibt noch die Parallelogrammregel:



$\underline{\omega}_{AB} = \underline{\omega}_{CD}$
$\underline{\omega}_{BC} = \underline{\omega}_{DA}$

Diese Regel folgt direkt aus der Geometrie des Parallelogramms. Da gegenüberliegende Seiten immer Parallel zueinander sein müssen, können wir sehen, dass sie sich jeweils gleich schnell und in die gleiche Richtung drehen müssen. Wichtig zu bemerken ist aber dass die Position ihrer MZ nicht unbedingt gleich ist!

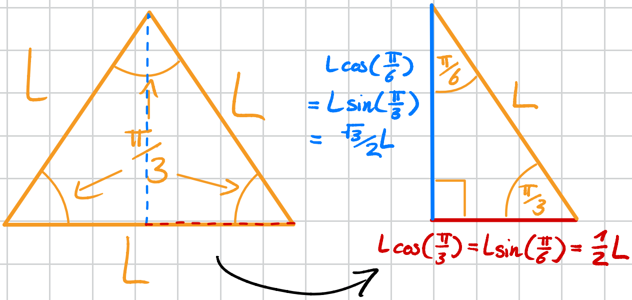
Mit diesen drei Regeln kann man nun alle gesuchten Werte heraus finden.

• 3.1 MZ und ω finden (Schnell)

Für die Prüfungen muss man diesen letzten Schritt aber relativ schnell können. Deswegen stehen hier einige Tipps und Methoden zu wie ich solche Aufgaben angehe.

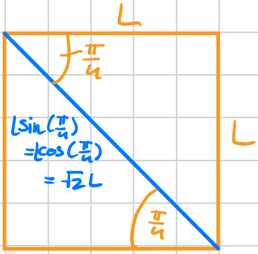
Als erstes lohnt es sich mit der Geometrie dieser Aufgaben vertraut zu machen. Wenn man mal in die Zusammenfassung schaut, erkennt man bei der Trig-Tabelle, dass eigentlich nur drei Winkel gegeben sind: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ($30°, 45°, 60°$).

Vor allem sind die $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$ Winkel sind wichtig. Nämlich sind 95% der Dreiecke in den Fachwerken ganze oder halbe gleichseitige Dreiecke:



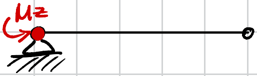
Ich empfehle daher stark diese Winkel und Längen entweder durch üben oder auswendig lernen im Kopf zu haben. Dann kann man direkt bei den Dreiecken die Winkel und Längen brauchen, ohne sie jedes Mal berechnen zu müssen.

Der $\frac{\pi}{4}$ Winkel ist hauptsächlich wichtig für Quadrate.



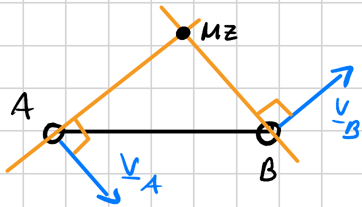
Als Zweites zeichne ich immer alle gegebenen $\underline{v}$ und MZ in das Fachwerk ein. Fachwerk Aufgaben werden meistens viel einfacher sobald man sich vorstellen kann, wie der Bewegungszustand aussehen sollte. Daher markiere ich auch direkt alle Starrkörper, die aus mehreren Stäben bestehen.

Als nächstes versuche ich alle MZ einzuzeichnen, die ich gerade "sehen kann" zum Beispiel wenn ein Stab gelenkig gelagert ist, weiss ich, dass das MZ in der Lagerung liegt.



Falls man aber nur eine Geschwindigkeit gegeben hat, lohnt es sich auch meistens eine Senkrechte Gerade zum $\underline{v}$ Vektor einzuzeichnen. Wir wissen ja dass das MZ irgendwo auf dieser Gerade liegt.

Hat man zwei $\underline{v}$ im selben Starrkörper, liegt das MZ im Schnittpunkt ihrer Senkrechten.



Kennt man dann das MZ, kann man auch direkt die Richtungen der Geschwindigkeiten im Körper einzeichnen. Das ω bestimmt man dann entweder mit dem Satz vom MZ oder mit der Parallelogrammregel.

Dadurch wird der Grossteil der Aufgabe zu einem Geometrieproblem, was man recht schnell lösen kann, wenn man die Dreiecke oben kennt.

Diese graphischen Methoden sind sehr Praktisch, um Aufgaben schnell zu Lösen. Sie sind aber auch oft eine Art zweischneidiges Schwert. Man kann auf diese Weise viel einfacher dinge "sehen", die auf den ersten Blick richtig scheinen aber falsch sind.

Deswegen ist es geraten, solche Aufgaben viel zu üben um diese Intuition zu entwickeln.