POLYBOX

Schnellübung 7

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES

Institute for Mechanical Systems

Institut für Mechanische Systeme

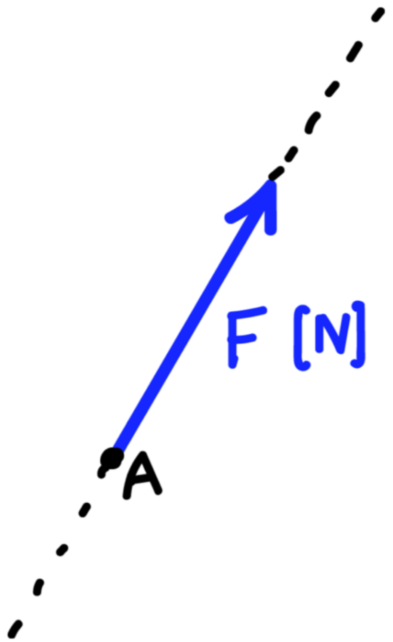
Einführung Schnellübung 7

POLYBOX

WH: Kraft

Charakterisiert durch:

- Angriffspunkt A
- Richtung
- Betrag (in Newton [N])
- Wirkungslinie: Gerade durch A parallel zum Vektor
  → **Verschiebungssatz**



Verschiebungssatz: Die Kraft $\underline{F}$ kann entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich das Moment der Kraft bezüglich eines beliebigen Punktes verändert.

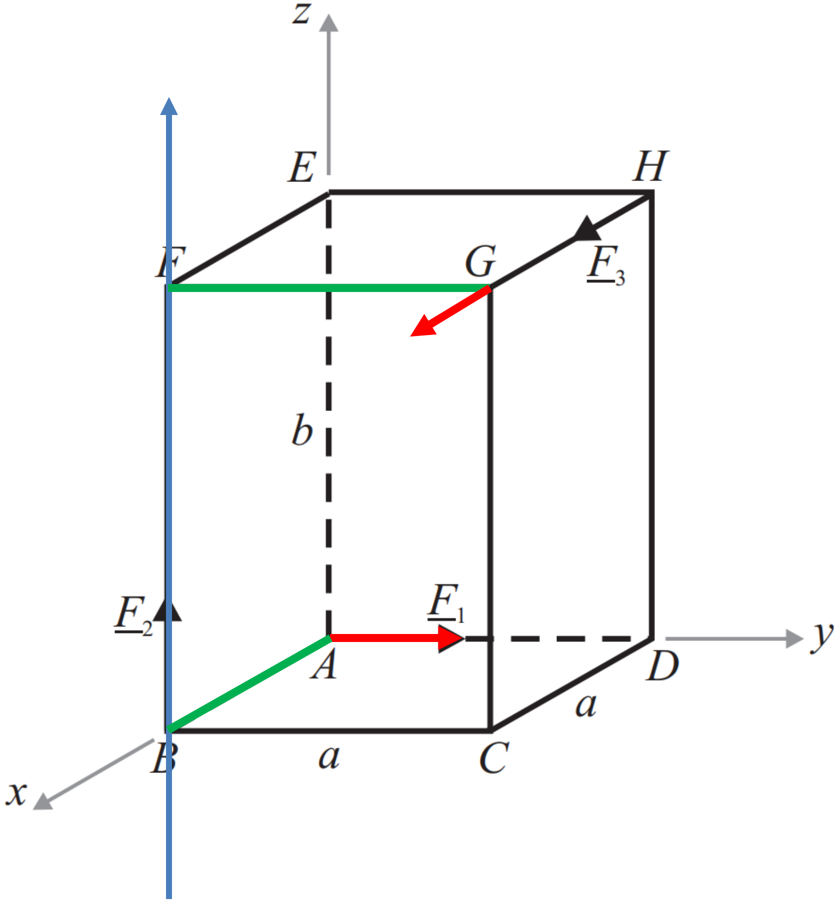
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 7

WH: Moment

- Definition: $\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{OA} \times \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}} \times \underline{AO}$

- Hilfsmittel zur Berechnung:
  1. F entlang Wirkungslinie verschieben bis F ⊥ r ⊥ M_O
  2. Moment mit $M_O = F \cdot r$ berechnen
  3. Richtung aus Rechte-Hand-Regel



POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 7

POLYBOX

Dyname der Kräftegruppe $\{A_i|\underline{\mathbf{F}_i}\}$

- Resultierende $$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}_i}$$
- Moment einer Kräftegruppe (in Punkt B) $$\underline{\mathbf{M}_B} = \sum_i \underline{\mathbf{F}_i} \times \underline{A_i B}$$

→ **Dyname in beliebigem Punkt B:** $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}_B}\}$

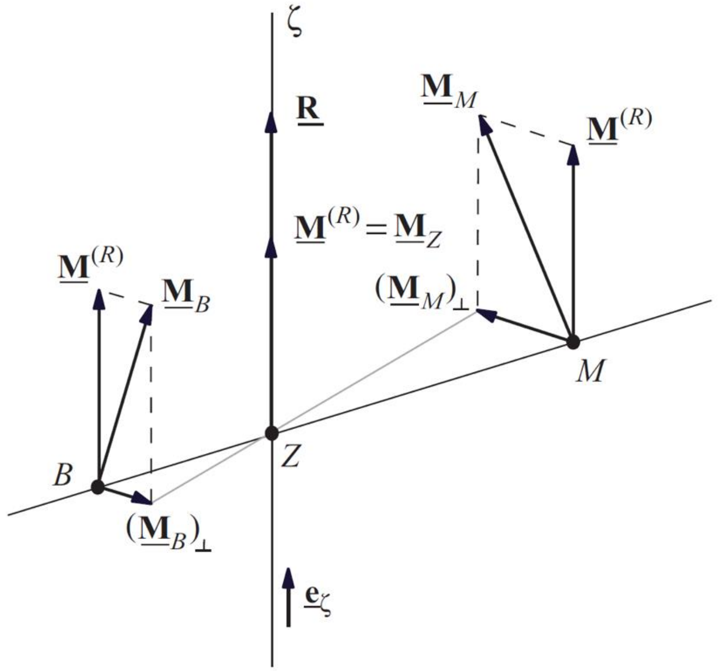
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 7

Vergleich Statik & Kinematik

$\{\underline{R}, \underline{M}_B\}$		$\{\underline{\omega}, \underline{v}_B\}$
$\underline{R}$	1. Invariante	$\underline{\omega}$
$\underline{M}_B$	Punktgebundener Vektor	$\underline{v}_B$
$\underline{M}_A = \underline{M}_B + \underline{R} \times \underline{BA}$		$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$
$\{\underline{R}, \underline{M}^{(R)}\}$	auf ζ, Zentralachse	$\{\underline{\omega}, \underline{v}_\omega\}$

2. Invariante



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

Einführung Schnellübung 7

Reduktionssatz

Eine Kräftegruppe $\{A_i|\underline{\mathbf{F}_i}\}$ lässt sich immer reduzieren auf ihre Dyname $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}_B}\}$ in einem beliebigen Punkt B.

Sonderfälle

1) Reduktion einer Kräftegruppe mit $\underline{\mathbf{R}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ auf eine Einzelkraft $\underline{\mathbf{R}}$ auf Zentralachse ζ

   Nur möglich, falls $\underline{\mathbf{M}}^{(R)} = \underline{0}$ → $\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}_B} = 0$. Dies gilt in folgenden Fällen:

   - $\underline{\mathbf{M}_B} = \underline{0}$ → $B \in \zeta$
   - $\underline{\mathbf{M}_B} \perp \underline{\mathbf{R}}$ (Parallele Kräfte oder ebenes Problem → Fachwerk)

2) Reduktion einer Kräftegruppe mit $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$ auf ein Kräftepaar $\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}_B}$ (unabhängig von Bezugspunkt)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 7

POLYBOX

Kräftegleichgewicht

Kräftegruppe in Gleichgewicht

→ Gleichgewichtsbedingungen (GGB):

$$\sum_i \underline{\mathbf{F}}_i = 0$$

$$\sum_i \underline{\mathbf{M}}_{B\,i} = 0$$

2D: 2$\mathbf{F}$ & 1$\mathbf{M}$
3D: 3$\mathbf{F}$ & 3$\mathbf{M}$

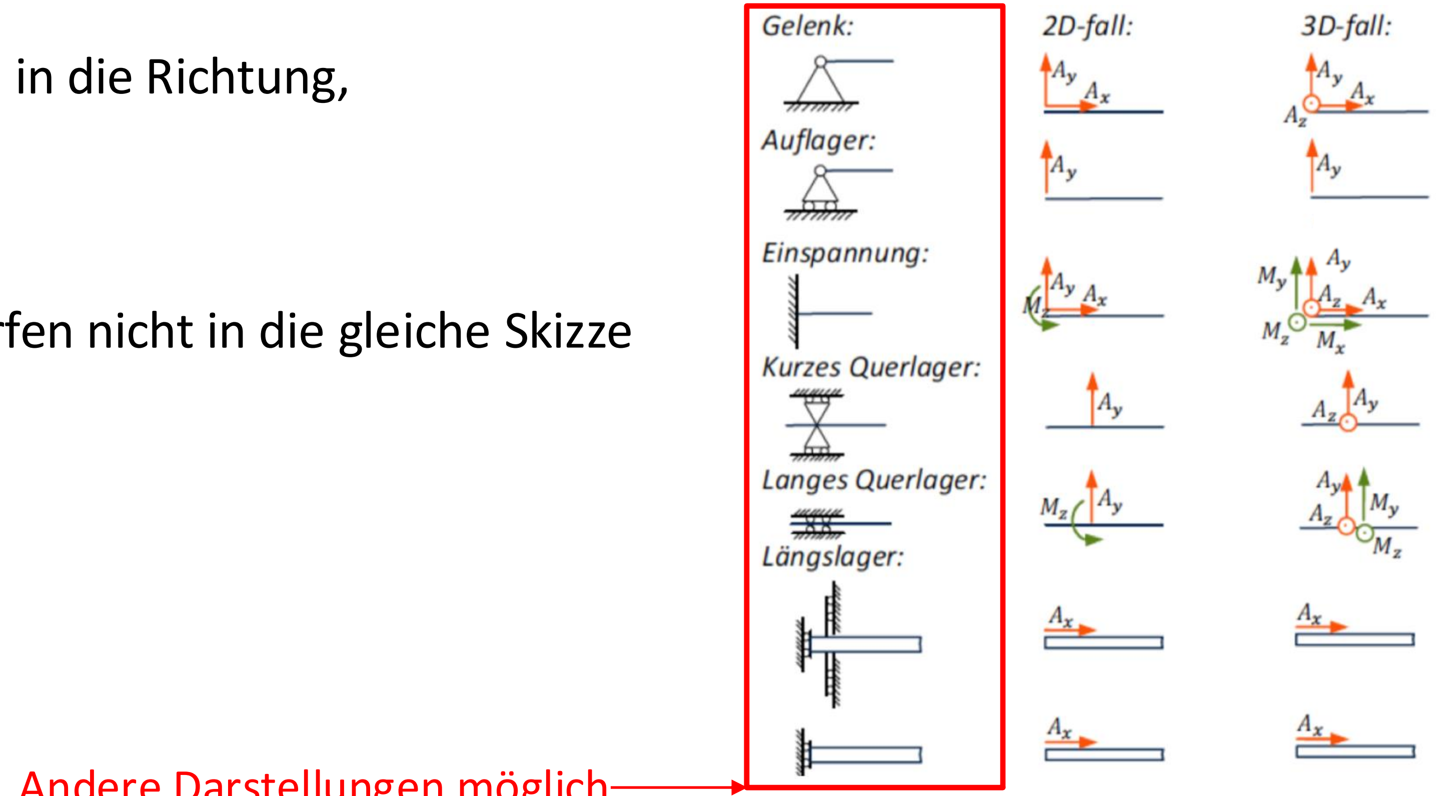
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 7

Lagerungen/Bindungen

Ein Lager bewirkt Kräfte/Momente in die Richtung, in welche es die Bewegung sperrt.

Wichtig: Lager und Lagerkräfte dürfen nicht in die gleiche Skizze einzeichnet werden!



POLYBOX

IMES Institute for Mechanical Systems Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 7

Aufgabe 1:

1. «Reduktion auf Einzelkraft» → Reduktionssatz
2. **Frage**: Muss der gesuchte Punkt im Körper sein?

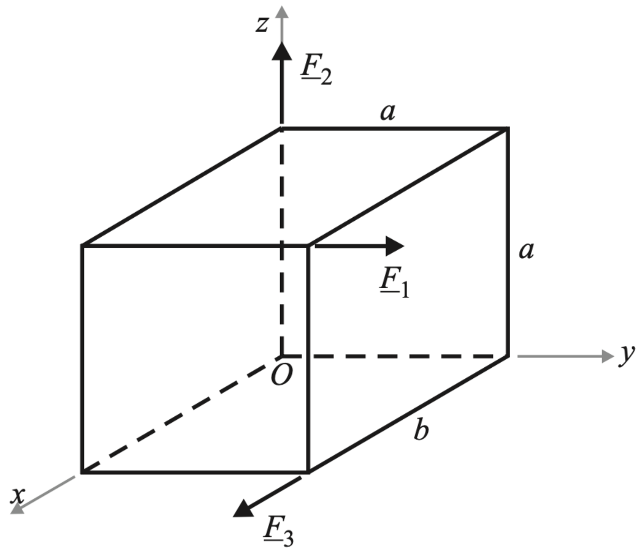
IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 7

POLYBOX

Aufgabe 1

Die Kräfte $\underline{F}_1 = P\underline{e}_y$, $\underline{F}_2 = P\underline{e}_z$ und $\underline{F}_3 = P\underline{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader (Kantenlängen b, a, a) an.



1. Wie muss a bei gegebenem b gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

2. In welchem Punkt muss die Einzelkraft eingeführt werden, wenn sie der gegebenen Kräftegruppe statisch äquivalent sein soll?

3. Geben Sie die Dyname im Punkt $(a, 0, a)$ an.

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. a)

1. $\underline{R}$ berechnen
2. $\underline{P'}_1, \underline{P'}_2, \underline{P'}_3$ bestimmen
3. Angriffspunkte entlang Wirkungslinie der Kräfte verschieben
4. $\underline{M}_O$ berechnen
5. $\underline{R} \cdot \underline{M}_O = 0$ setzen

1.a) Reduzierbar auf Einzelkraft $\rightarrow \underline{R} \cdot \underline{M}_P \overset{!}{=} 0$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}'_1 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \underline{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \underline{P}'_3 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}_1 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \underline{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{OP_1} \times \underline{F}_1 + \underline{OP_2} \times \underline{F}_2 + \underline{OP_3} \times \underline{F}_3$$

$$\underline{M}_0 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}}}_{\rightarrow 0} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ bP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ P(b-a) \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} \cdot \underline{M}_0 = \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ P(b-a) \end{pmatrix} = -P^2 a + P^2 (b-a) \overset{!}{=} 0$$

$$-2a + b \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{\underline{b = 2a}}$$

POLYBOX

Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. b)

1. Wie in der Kinematik die Hauptachse finden

wenn $\underline{\omega} \cdot \underline{v}_z = 0$ und $\underline{R} \cdot \underline{M}_z = 0$

b)

Kinematik: Punkt $\underline{Z}$ auf Zentralachse von $\underline{\omega}$ erfüllt $\underline{v}_z = \underline{0}^*$

Statik: Punkt $\underline{Z}$ auf Wirkungslinie von $\underline{R}$ erfüllt $\underline{M}_z = \underline{0}^*$

gleiches Vorgehen wie in Hauptachsenaufgaben:

$$\underline{M}_p = \underline{0} = \underline{M}_o + \underline{R} \times \underline{OZ} = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ P(b-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Z_x \\ Z_y \\ Z_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ P(b-a) \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} Z_z - Z_y \\ Z_x - Z_z \\ Z_y - Z_x \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Z_z - Z_y - a \\ Z_x - Z_z \\ Z_y - Z_x + b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$\text{I}: \; Z_y = Z_z - a$

$\text{II}: \; Z_x = Z_z$

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_z \\ Z_z - a \\ Z_z \end{pmatrix}, \quad Z_z = a \Rightarrow \underline{Z} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$\underline{Z}$ muss im / am Körper sein!

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

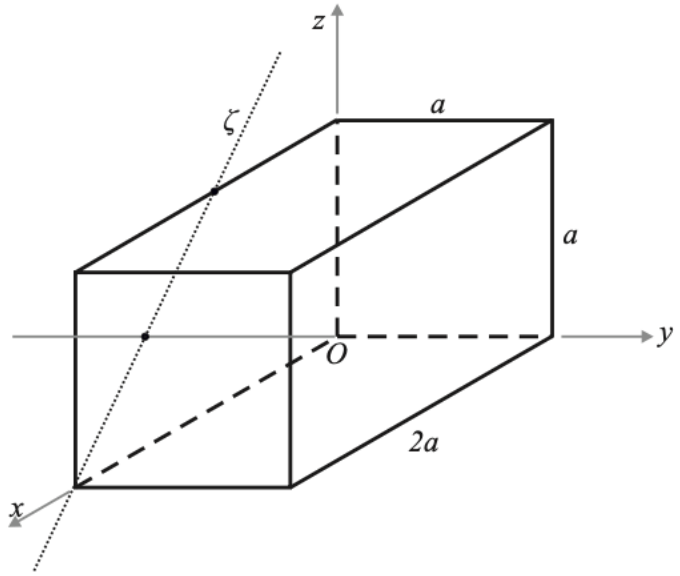
Lösung 1. c)

POLYBOX

$$\text{Zentralachse } \zeta: \quad r(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\underline{P} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ liegt auf Zentralachse!

Dyname in $\underline{P}$: $\underline{\underline{\{\underline{R}\,;\,\underline{0}\}}}$



Tipps Schnellübung 7

POLYBOX

Aufgabe 2:

- GGB aufstellen (intelligente Wahl des Punktes vereinfacht Rechenaufwand)

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

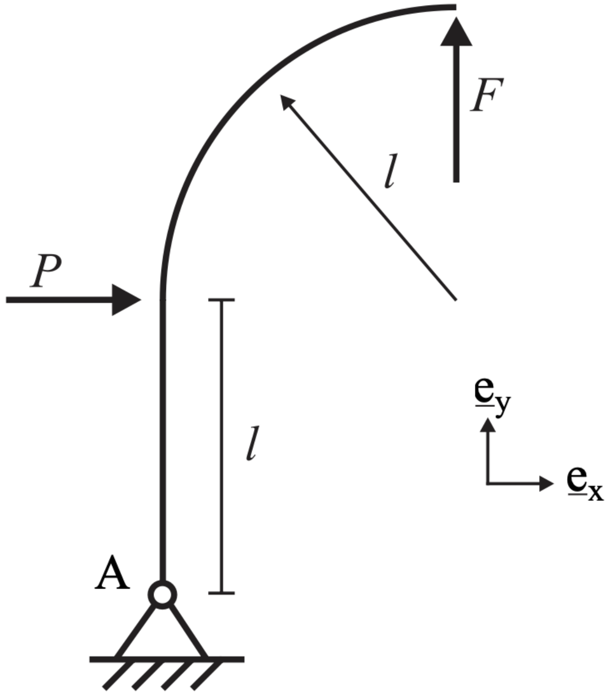
Schnellübung 7

POLYBOX

Aufgabe 2

Am abgebildeten, reibungsfrei gelagerten System greift eine Kraft P an. Am Gelenk in A greifen die Lagerkräfte $A_x\underline{e}_x$ und $A_y\underline{e}_y$ an.

Wie gross muss die Kraft F gewählt werden, damit die Kräftegruppe aller Kräfte am System im Gleichgewicht ist?



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 2.

POLYBOX

1. Momentengleichgewicht in A aufstellen
2. Momente in A mit $M = l * F$ berechnen

2.

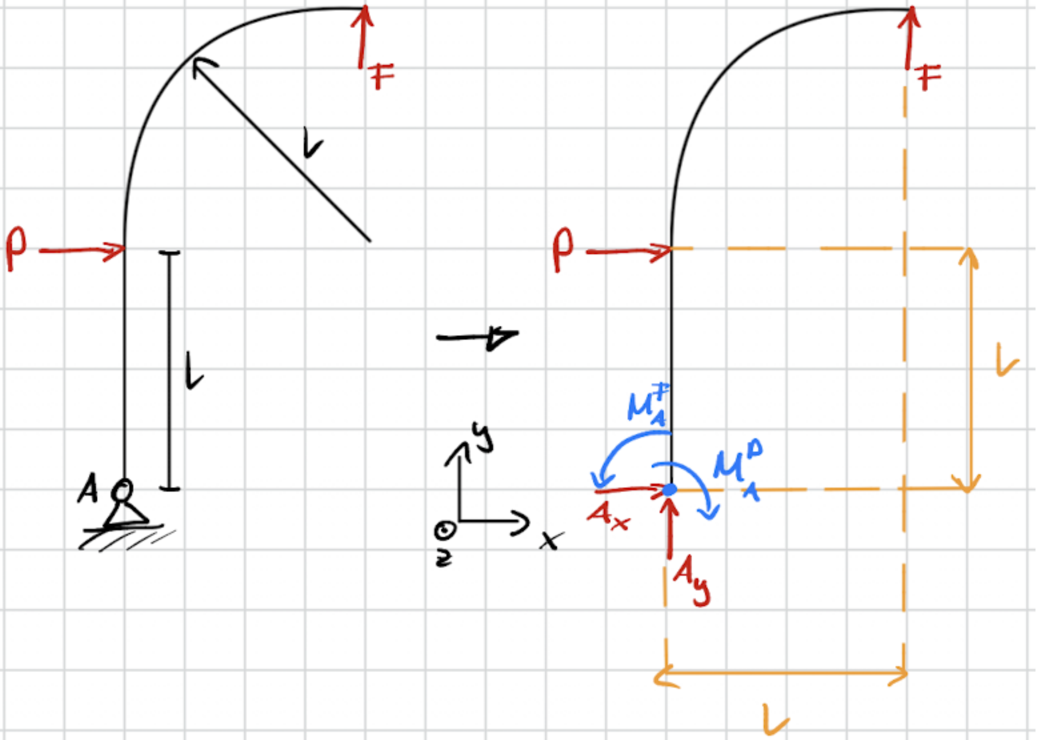
Momentengleichgewicht in A

$\sum_M^A = 0 : M_A^P + M_A^F = 0$

rechte Hand Regel!

$-PL + FL = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{P = F}}$



Tipps Schnellübung 7

POLYBOX

Aufgabe 3:

- Zuerst gut die Skizze studieren

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

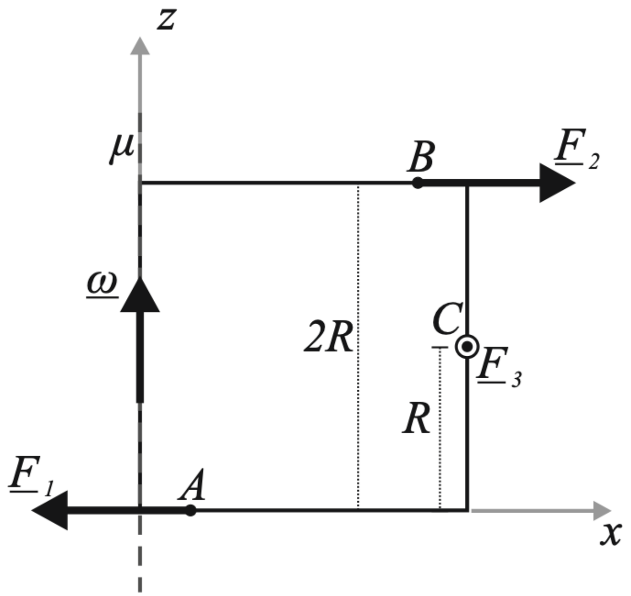
Schnellübung 7

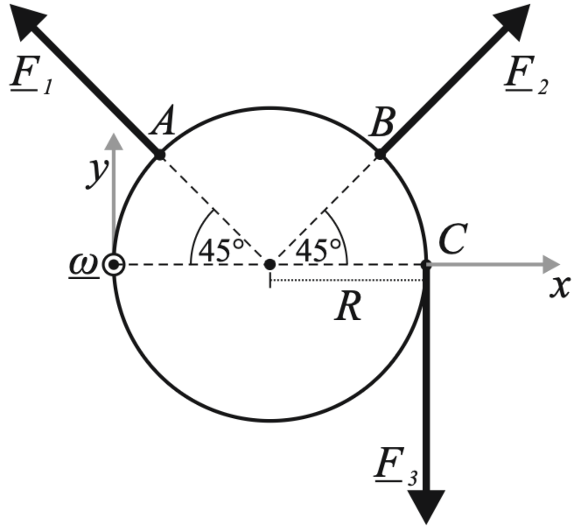
POLYBOX

Aufgabe 3

Ein Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe $2R$ dreht sich um eine Mantellinie μ mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ vom Betrag ω. Auf ihn wirkt eine Kräftegruppe G, die gemäss Figur aus den drei Kräften $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ und $\underline{F}_3$ mit den Beträgen F, F bzw. $\sqrt{2}F$ besteht.

Berechnen Sie die Leistung dieser Kräfte auf mindestens zwei Arten.





IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. Alle Geschwindigkeiten mit Starrkörperformel bestimmen
2. Skalarprodukte berechnen und aufsummieren

POLYBOX

3. 1. Art: $P = \underline{v}_A \cdot \underline{F}_1 + \underline{v}_B \cdot \underline{F}_2 + \underline{v}_C \cdot \underline{F}_3$

$$\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega R(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_B = \underline{\omega} \times \underline{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega R(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C = \underline{\omega} \times \underline{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_1 = F\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_2 = F\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_3 = F\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\omega R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega R(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -\omega R\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega R(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega R \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} F$$

$$P = \omega R F\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{2}\,\omega R F = P}}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 3.

1. $\underline{R}$ berechnen
2. $\underline{M}_O$ an beliebigen Punkt berechnen
3. Skalarprodukt mit $\underline{\omega}$

2. Art: $P = \underline{R}\cdot\underline{v}_O + \underline{M}_O \cdot \underline{\omega}$

$$\underline{R} = \underline{F}_1+\underline{F}_2+\underline{F}_3 = F\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\right) = \underline{0}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \omega\end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_O = \underline{OA}\times\underline{F}_1 + \underline{OB}\times\underline{F}_2 + \underline{OC}\times\underline{F}_3$$

$$\underline{M}_O = \begin{pmatrix}R(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\\ R\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\,F\\ \sqrt{2}/2\,F\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\\ R\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2R\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\,F\\ \sqrt{2}/2\,F\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2R\\ 0\\ R\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}F\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_O = FR\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ (1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ (1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{M}_O = FR\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cancel{-\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cancel{\sqrt{2}}\\ 0\\ -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{M}_O = FR\left(\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}FR$$

$$P = \cancel{\underline{R}\cdot\underline{v}_O}^{\,0} + \underline{M}_O\cdot\underline{\omega} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}FR\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix} = \underline{\underline{-\sqrt{2}\,\omega RF = P}}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 7

POLYBOX

Aufgabe 1:

- Gleichung für Leistung in B mit Hilfe von allgemeiner Bewegungsgleichung
- Welche Vektoren sind parallel/senkrecht und was heisst das für ihr Skalar-/Kreuzprodukt?

Aufgabe 2:

- Verschiebungssatz: Kräfte können entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden

Aufgabe 3:

- Leistung auf zwei Varianten berechnen:
    - Komponentenweise vektoriell
    - Dyname der Kräftegruppe in einem Punkt bestimmen, daraus Leistung berechnen

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme