POLYBOX

Schnellübung 8

Mechanik 1 – Kinematik und Statik

Mark Fischer

HS 2025

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Statische Äquivalenz

Zwei Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G^*\}$ sind statisch äquivalent, wenn ihre Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ und ihr Moment $\underline{\mathbf{M}}_A$ für einen beliebigen Punkt A gleich sind.

Somit haben $\{G\}$ und $\{G^*\}$ gleiche Leistung für alle Starrkörperbewegungen

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Gleichgewicht

Eine Kräftegruppe ist im Gleichgewicht wenn sie keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment aufweist:

$$\sum \mathbf{F}_x = \sum \mathbf{F}_y = \sum \mathbf{F}_z = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_{A_x} = \sum \mathbf{M}_{A_y} = \sum \mathbf{M}_{A_z} = 0$$

2D: nur $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{M}_{A_z}$

Für jeden beliebigen Punkt A

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Ruhelage vs. Gleichgewicht

(Beweis durch PdvL)

Ruhelage $\Longrightarrow$ **Gleichgewicht herrscht**

$\not\Longleftarrow$

„Nichts bewegt sich“

„Es bleibt in Ruhe“

$$\underline{V}_A = \underline{0}$$

Für jeden beliebigen Punkt A

„Gleichgewichtsbedingungen erfüllt“

$$\underline{R} = \underline{0}, \underline{M}_A = \underline{0}$$

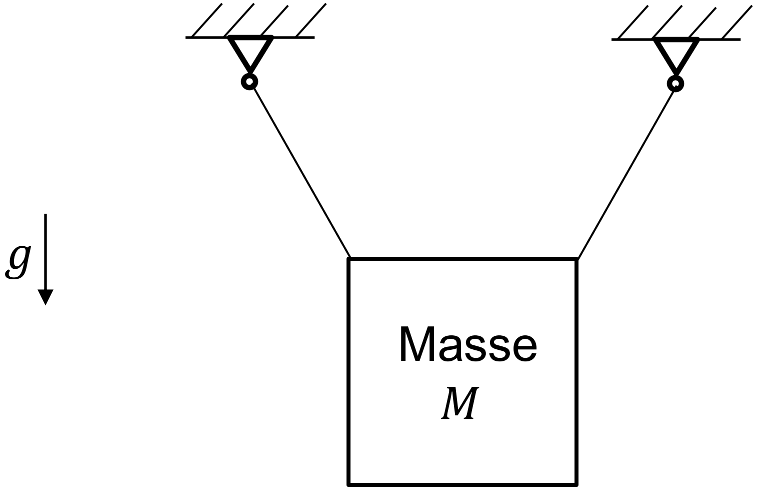
Für jeden beliebigen Punkt A

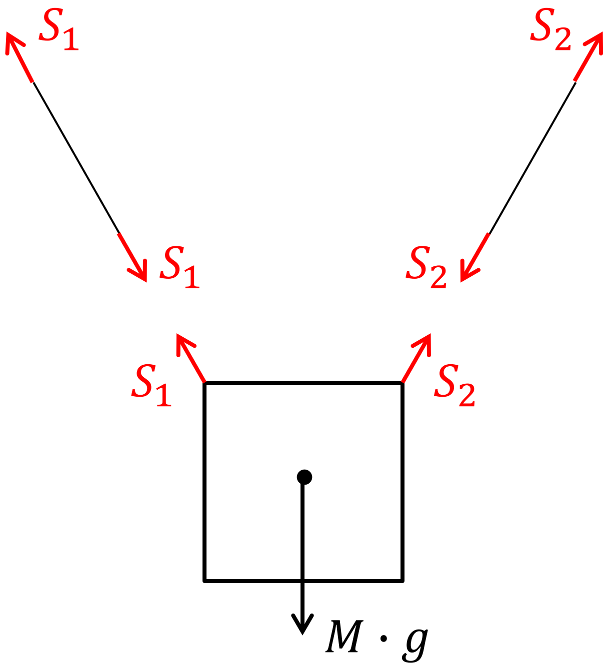
Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Seilkräfte

Seile können nur auf Zug belastet werden $\Longrightarrow \boxed{S > 0}$
Kraft immer in Seilrichtung & in Zugrichtung einführen!





IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

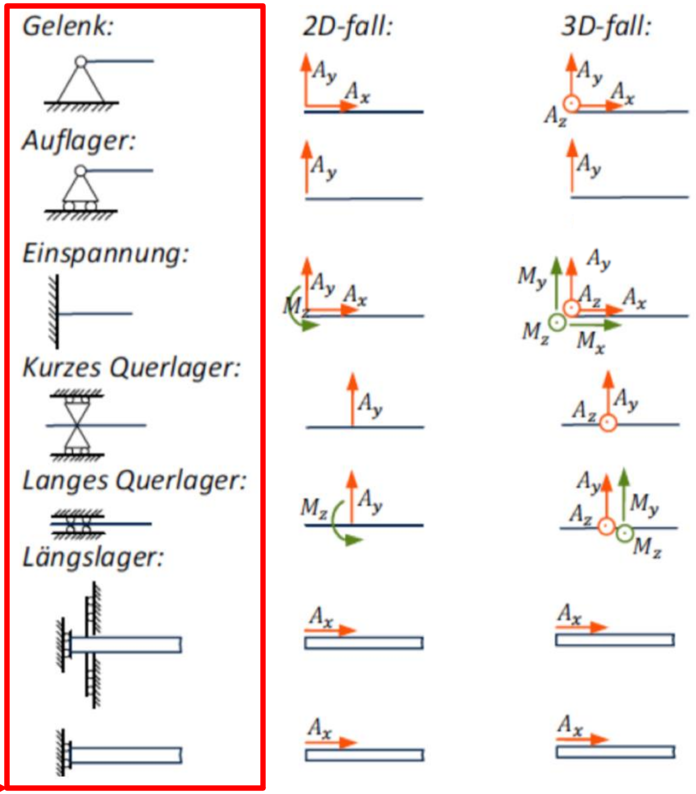
Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Lagerungen/Bindungen

Ein Lager bewirkt Kräfte/Momente in die Richtung, in welche es die Bewegung sperrt.

Wichtig: Lager und Lagerkräfte dürfen nicht in die gleiche Skizze einzeichnet werden!



Andere Darstellungen möglich

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Einführung Schnellübung 8

POLYBOX

Verteilte Kräfte: Resultierende und Kräftemittelpunkt

Linienverteilt:	$R = \int_0^L s(x)dx$	$x_s = \frac{1}{R}\int_0^L x \cdot s(x)dx$

Mit $R =$ Betrag der Resultierenden, $x_{s,}\ \underline{r}_s$: Kräftemittelpunkt

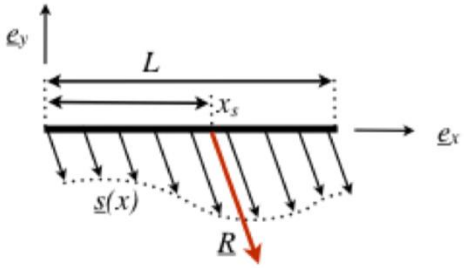
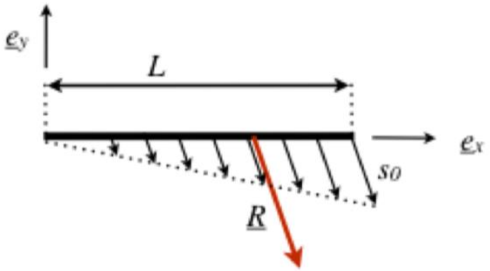
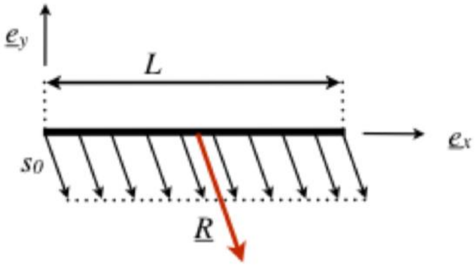
Flächenverteilt:	$R = \iint s(x,y)dxdy$	$\underline{r}_s = \frac{1}{R}\iint \underline{r} \cdot s(x,y)dxdy$
Volumenverteilt:	$R = \iiint s(x,y,z)dxdydz$	$\underline{r}_s = \frac{1}{R}\iiint \underline{r} \cdot s(x,y,z)dxdydz$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

POLYBOX

Einführung Schnellübung 8

Spezialfälle von verteilten Kräften

Allgemein	Dreiecksverteilung	Gleichförmige Verteilung
		
$R = \int_0^L s(x)dx$ $x_s = \frac{1}{R}\int_0^L x \cdot s(x)dx$	$R = \frac{1}{2} L \cdot s_0$ $x_s = \frac{2}{3} \cdot L$	$R = L \cdot s_0$ $x_s = \frac{1}{2} \cdot L$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 8

Aufgabe 1:

Seilkräfte immer auf Zug einführen

Sind hier alle Komponenten der Seilkräfte verschieden von null?

POLYBOX

Schnellübung 8

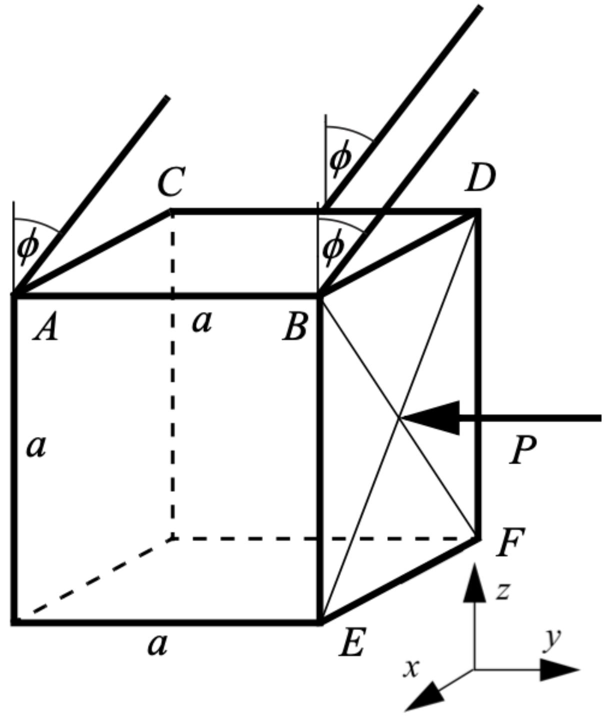
POLYBOX

Aufgabe 1

Ein kubischer Klotz (Kantenlänge a) ist in A, B und in der Mitte zwischen C und D an Fäden aufgehängt. Die drei Fäden sind gleich lang, parallel und gewichtslos. Die Deckfläche des Würfels sei horizontal. Ausser dem im Würfelmittelpunkt angreifenden Gewicht G wirkt normal zur Seitenfläche $BDFE$ in deren Mittelpunkt eine Kraft vom Betrag P.

a) Der Klotz sei in einer Ruhelage. Bestimmen Sie die Fadenkräfte und den Winkel ϕ zwischen den Fäden und der Vertikalen.

b) Wie gross darf der Betrag P höchstens sein, damit die Fäden straff bleiben?



IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. a)

1. Durch GGB in x-Richtung bestimmen dass die x Komponenten = 0 sind
2. Richtungsvektor der Seilkräfte bestimmen
3. die restlichen GGB aufstellen

Schnellübung 8

1.a)

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ S_{1z} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} S_{2x} \\ S_{2y} \\ S_{2z} \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{pmatrix}$$

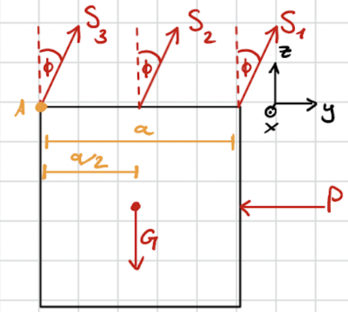
$\sum F_x = 0: S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} = 0$

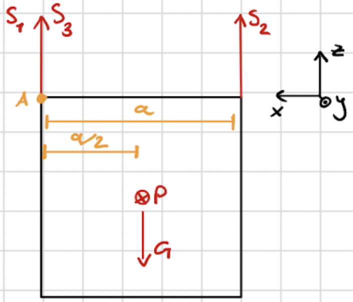
$S_1 \parallel S_2 \parallel S_3 \rightarrow S_{1x}, S_{2x}, S_{3x}$ haben alle das gleiche Vorzeichen

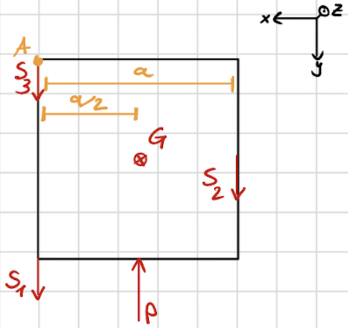
"Parallel"

$\hookrightarrow \boxed{S_{1x}, S_{2x}, S_{3x} = 0}$

$$\Rightarrow \underline{e}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S}_1 = S_1 \underline{e}_S, \; \underline{S}_2 = S_2 \underline{e}_S, \; \underline{S}_3 = S_3 \underline{e}_S$$







Alle anderen Gleichgewichtsbedingungen (GGB) aufstellen:

3D → 3 Kräfte GGB + 3 Momenten GGB ⇒ 6 GGB

I: $\sum F_y = 0: -P + (S_1 + S_2 + S_3)\sin\phi = 0$

II: $\sum F_z = 0: -G + (S_1 + S_2 + S_3)\cos\phi = 0$

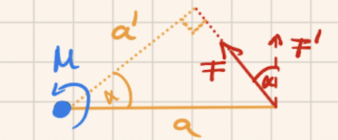
Momenten GGB im Punkt A mit Hilfe der drei Ansichten aufstellen

III: $\sum M_x^A = 0: S_1 a \cos\phi + S_2 \frac{a}{2} \cos\phi - P\frac{a}{2} - G\frac{a}{2} = 0$

IV: $\sum M_y^A = 0: S_2 a \cos\phi - G\frac{a}{2} = 0$

V: $\sum M_z^A = 0: -S_2 a \sin\phi + P\frac{a}{2} = 0$

Tipp: Es kann entweder F oder a projeziert werden



$M = F a' = F' a = F a \cdot \cos(\alpha)$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. a)

$\mathrm{I}: \sum F_y = 0: -P + (S_1 + S_2 + S_3)\sin\phi = 0$

$\mathrm{II}: \sum F_z = 0: -G + (S_1 + S_2 + S_3)\cos\phi = 0$

$\mathrm{III}: \sum M_x^A = 0: S_1 a\cos\phi + S_2\frac{a}{2}\cos\phi - P\frac{a}{2} - G\frac{a}{2} = 0$

$\mathrm{IV}: \sum M_y^A = 0: S_2 a\cos\phi - G\frac{a}{2} = 0$

$\mathrm{V}: \sum M_z^A = 0: -S_2 a\sin\phi + P\frac{a}{2} = 0$

IV umformen: $S_2\cos\phi = \frac{G}{2}$

$$\boxed{S_2 = \frac{G}{2\cos\phi}} \quad ①$$

III umformen: $S_1 = \frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{P}{2} + \frac{G}{2} - \frac{S_2}{2}\cos\phi\right)$

① in III einsetzen: $S_1 = \frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{P}{2} + \frac{G}{2} - \frac{G}{4}\right)$

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{4\cos\phi}(2P + G)} \quad ②$$

II umformen: $S_3 = \frac{G}{\cos\phi} - S_1 - S_2$

①, ② in II einsetzen: $S_3 = \frac{G}{\cos\phi} - \overbrace{\frac{P}{2\cos\phi} - \frac{G}{4\cos\phi}}^{②} - \overbrace{\frac{G}{2\cos\phi}}^{①}$

$$S_3 = \frac{G}{4\cos\phi} - \frac{P}{2\cos\phi}$$

$$\boxed{S_3 = \frac{1}{4\cos\phi}(G - 2P)}$$

IV umformen: $S_2\cos\phi = \frac{G}{2}$

V umformen: $S_2\sin\phi = \frac{P}{2}$

$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{IV}}: \frac{S_2\sin\phi}{S_2\cos\phi} = \frac{P/2}{G/2}$

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{P}{G} \Rightarrow \tan\phi = \frac{P}{G}$$

$$\boxed{\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{P}{G}\right)}$$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Lösung 1. b)

POLYBOX

1. $S_1 > 0$ solange $P > 0$
2. $S_2 > 0$ für alle P
3. $S_3 > 0$ für alle $P > G/2$

b) straffer Faden $\rightarrow$ auf Zug belastet $\rightarrow$ $S_1, S_2, S_3 > 0$

$$S_1 = \frac{1}{4\cos\phi}(2P+G) > 0 \quad \forall P > 0$$

"für alle"

$$S_2 = \frac{G}{2\cos\phi} > 0 \quad \forall P$$

side note: $\cos\phi \in [0, 1] \; \forall P$ da $\phi \in [0, 90°] \; \forall P$, dies folgt daraus, dass $\operatorname{atan}(90°) = \frac{P}{G} = \infty$. In anderen Worten, $\cos(\phi)$ kann nur zwischen 0 und 1 liegen da P sonst entweder unendlich gross oder negativ sein müsste.

$$S_3 = \frac{1}{\cancel{4}\cos\phi}(G-2P) > 0$$

$$G - 2P > 0$$

$$\boxed{P < \frac{G}{2}}$$

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Schnellübung 8

Aufgabe 2:

Stichwort: Einseitige vs. Beidseitige Bindung

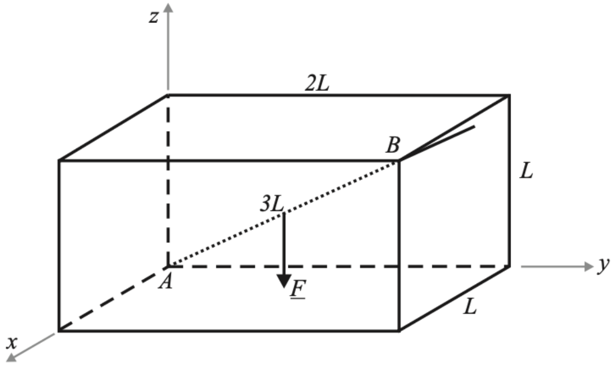
POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Schnellübung 8

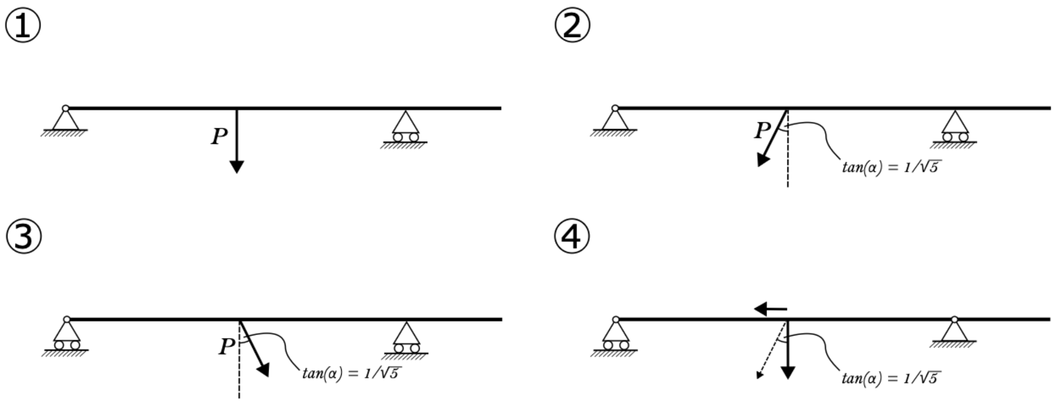
Aufgabe 2

In einer oben offenen, quaderförmigen Kiste (Kantenlängen $2L$, L, L), die auf einer horizontalen Ebene steht, befindet sich ein Balken (Länge $3L$). Am Balken mit vernachlässigbarem Gewicht wirkt in der Mitte zwischen den reibungsfrei vorausgesetzten Bindungen A und B eine vertikale Last $\underline{F}$ (Betrag P).



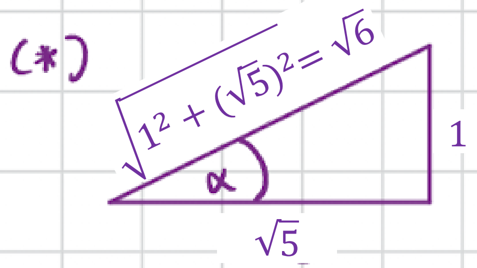
a) Wählen Sie aus den Möglichkeiten (1) – (4) das am besten passende Ersatzsystem und begründen Sie Ihre Wahl.

b) Berechnen Sie anhand des Ersatzsystems die Lagerkräfte am Balken.



Lösung 2.

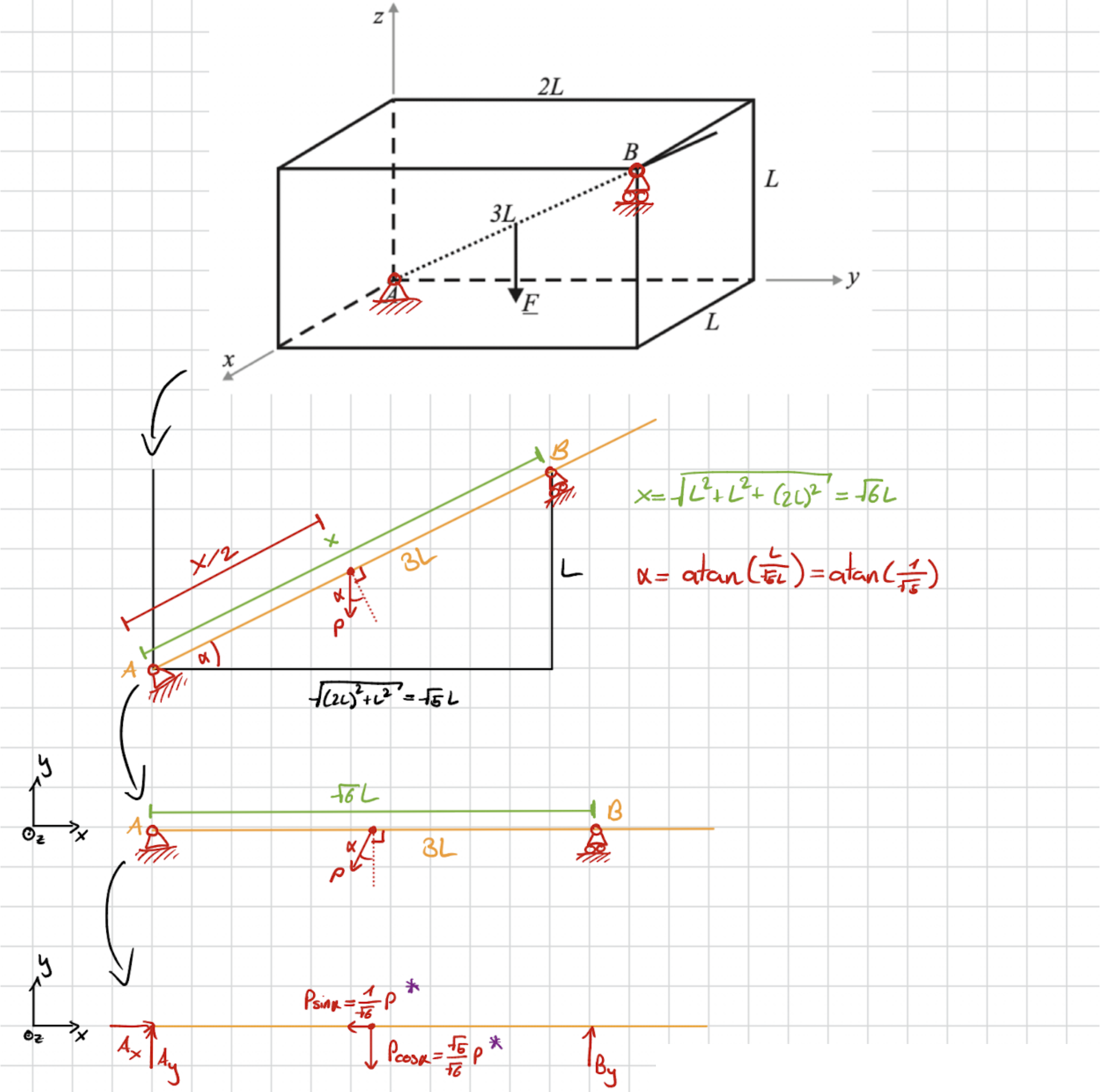
1. Lagerungen an beiden Ecken identifizieren
2. Auf 2D reduzieren
3. Längen und Winkel finden
4. Lagerkräfte mit GGB berechnen



$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

2.



$\sum F_x = 0: \; A_x - \frac{1}{\sqrt{6}} P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_x = \frac{1}{\sqrt{6}} P}}$

$\sum M_z^A = 0: \; -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} P \frac{\sqrt{6}}{2} L + B_y \sqrt{6} L = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B_y = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} P}}$

$\sum F_y = 0: \; A_y + B_y - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_y = \frac{\sqrt{5}}{6} P - B_y = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} P}}$

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Tipps Hausübung 8

POLYBOX

Aufgabe 1:
Wo greifen die Kräfte G_1 und G_2 an?

Aufgabe 2:
Koordinatensystem in Richtung AB einführen
Richtung der Bindungskraft in Punkt B?
Wasserdruck auf Klappe kann als dreiecksverteilte Kraft (mit b flächenverteilt) senkrecht auf die Klappe betrachtet werden -> auf Einzelkraft reduzieren
Welche Gleichung liefert direkt die Bindungskraft in Punkt B?

Aufgabe 3:
Ebenes Problem
Bedingung für Ruhe $\Longleftrightarrow$ Bedingung für Seilkraft?

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

ZP 1 2025 A1.1

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die Bewegung eines materiellen Punktes M ist in sphärischen Koordinaten für $t \geq 0$ wie folgt beschrieben:

$$r = R \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}(1-\cos(\mu t)) \qquad \psi = \mu t\,.$$

R und μ sind gegebene Konstanten.

A1.1 (*2 Punkte*) Zu welcher Zeit t erreicht M zum ersten Mal $z = \frac{R}{2}$?

a) $t = \frac{1}{3\mu}$

b) $t = \frac{\pi}{6\mu}$

c) $t = \frac{4\pi}{3\mu}$

d) $t = \frac{2\pi}{3\mu}$

e) $t = \frac{\pi}{4\mu}$

f) $t = \frac{1}{2\mu}$

g) $t = \frac{\pi}{3\mu}$

h) Keine der Lösungen ist korrekt.

Aus ZF $\rightarrow$ $z = r\cos\theta$

$$z(t) = R\cos\left(\frac{2\pi}{3}(1-\cos(\mu t))\right) = \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}(1-\cos(\mu t))\right)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}(1-\cos(\mu t))$$

aus ZF

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}(1-\cos(\mu t))$$

$$1 = 2 - 2\cos(\mu t)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\mu t)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \mu t$$

$$\frac{\pi}{3} = \mu t \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{3\mu}} \quad g$$

POLYBOX

IMES

Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

ZP 1 2025 A1.2

POLYBOX

A1.2 (2 *Punkte*) Für den Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\mu}$, bestimmen Sie den Abstand d zwischen Punkt M und der Ebene $x = 0$.

a) $d = \sqrt{3}R$

b) $d = \frac{\sqrt{3}R}{2}$

c) $d = R$

d) $d = 0$

e) $d = \frac{R}{2}$

f) $d = \frac{\sqrt{2}R}{2}$

g) $d = 2R$

h) Keine der Lösungen ist korrekt.

Aus ZF $\rightarrow$ $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$r = R$, $\varphi(t=\frac{\pi}{2\mu}) = \frac{\pi}{2}$, $\theta(t=\frac{\pi}{2\mu}) = \frac{2\pi}{3}$

$x = R\sin(\frac{2\pi}{3})\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} = 0$

$\Rightarrow M(t=\frac{\pi}{2\mu})$ liegt auf der Ebene $x=0$! Daher ist $d=0$

$\boxed{d=0}$ d

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

ZP 1 2025 A1.3

A1.3 (*1 Punkt*) Zu welcher Zeit t erreicht der Punkt M zum ersten Mal den geometrischen Punkt P mit Koordinaten $x_P = R$, $y_P = R$, $z_P = R$?

a) $t = \frac{2\pi}{\mu}$

b) $t = \frac{\pi}{\mu}$

c) $t = \mu$

d) $t = 0$

e) $t = \pi$

f) $t = \mu\pi$

g) $t = \frac{\pi}{2\mu}$

h) Keine der Lösungen ist korrekt.

$x_p = y_p = z_p = R \Rightarrow$ Diagonale durch 1. Oktanten

$r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2} = \sqrt{3}\,R$

$r_p = \sqrt{3}\,R$!!!

r ist aber gleich R für alle t!

$\hookrightarrow$ h) keine der Lösungen ist korrekt da M nie durch P gehen kann

POLYBOX

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

ZP 1 2025 A1.4

A1.4 (3 *Punkte*) Theoriefragen: Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

a) Für Punkte auf der y-Achse ist die ρ-Koordinatenlinie $\overline{\rho}$ parallel zur x-Achse.

b) in zylindrischer Basis: $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$

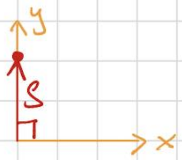
c) $\dot{\underline{e}}_\rho = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

d) in sphärischer Basis: die skalare Kompenente des Ortsvektors ist unabhängig von θ und ψ.

e) $\dot{\underline{e}}_x = \dot{\underline{e}}_y$

f) Die Ebene x = 0 kann auch als $\varphi = \pi$ beschrieben werden.

✗ a)



$\underline{e}_\rho$ ist senkrecht auf $\underline{e}_x$, nicht parallel.

✗ b) $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$ → aus ZF

✓ c) $\dot{\underline{e}}_\rho = \frac{d}{dt}(\underline{e}_\rho) = \frac{d}{dt}(\cos\varphi\,\underline{e}_x + \sin\varphi\,\underline{e}_y)$

$= (-\dot{\varphi}\sin\varphi\,\underline{e}_x + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\underline{e}_y)$

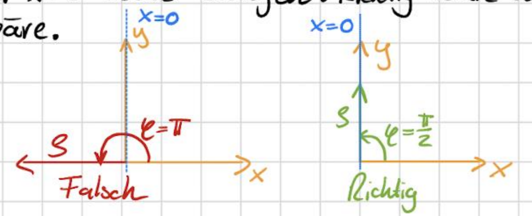
$= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y) = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

✓ d) Skalare Komponente ⇒ Betrag vom Ortsvektor $\underline{r}$

↳ $|\underline{r}|$ ist unabhängig von Θ und Ψ

✓ e) $\dot{\underline{e}}_x = \dot{\underline{e}}_y = 0$ da beide konstant sind

✗ f) wenn $\varphi = \pi$ ist, können wir uns immernoch ausserhalb von der $x=0$ Ebene bewegen. Richtig wäre das Statement, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wäre.



Fragen?

- Jetzt!
- Nach Stunde zu mir
- ETH Mail (fischerma@student.ethz.ch)

Whatsapp-Gruppe

POLYBOX

Anonymes Feedback

IMES
Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme