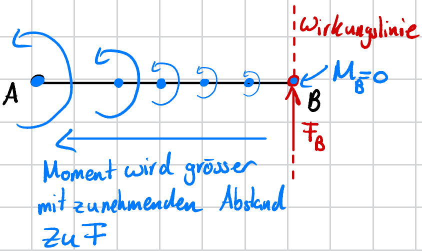
Theorie

• Kräfte und Momente

Kräfte sind physikalische Wechselwirkungen, welche auf einen Körper wirken. Sie werden als Vektoren mit Betrag, Richtung und Angriffspunkt dargestellt. Man kann Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben, wodurch der Lastzustand nicht verändert wird.

Momente sind eine Art "drehende Kraft". Sie werden ebenfalls durch einen Vektor mit Betrag, Richtung und einem Referenzpunkt dargestellt. Die Richtung und Betrag des Vektors stellen dabei, ähnlich wie bei $\underline{\omega}$, die Normale auf die "Rotationsebene" und die Stärke des Moments.

Momente entstehen in allen Punkten eines Körpers, die nicht auf der Wirkungslinie der angreifenden Kraft liegen.



Das Moment an einem bestimmten Punkt lässt sich folgendermassen bestimmen:

$$\underline{M}_O = \underline{OA} \times \underline{F}_A$$

Wenn mehrere Kräfte am gleichen Körper angreifen, wird das Moment so berechnet:

$$\underline{M}_O = \underline{OA_1} \times \underline{F}_{A_1} + \underline{OA_2} \times \underline{F}_{A_2} + \dots$$

Wenn der Verbindungsvektor (in diesem Kontext auch Hebelarm genannt) senkrecht auf die Kraft steht, kann die skalare Formel verwendet werden: $M_O = |\underline{OA}| \cdot F_A$

Es lohnt sich daher die Kraft so zu verschieben, dass man das Moment skalar berechnen kann.

• Dyname und Invarianten

Die Dyname beschreibt, ähnlich wie die Kinemate, einen Lastzustand vollständig. Sie besteht aus der Resultierenden $\underline{R}$ und dem Moment an einem beliebigen Punkt $\underline{M}_P$. Sie wird folgendermassen dargestellt: $\{\underline{R}; \underline{M}_P\}$ (zur Erinnerung die Kinemate: $\{\underline{\omega}; \underline{v}_P\}$)

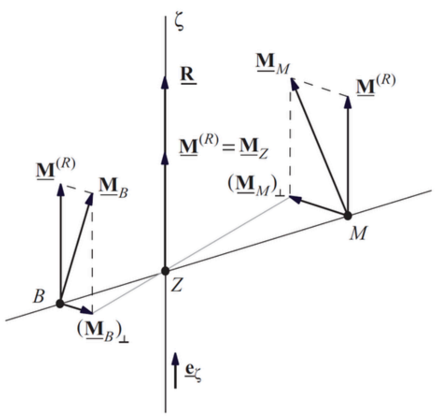
Die Resultierende $\underline{R}$ ist dabei gleich für alle Punkte im selben Körper (wie $\underline{\omega}$). Sie ist die Summe aller angreifenden Kräfte: $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots$.

Das Moment $\underline{M}_P$ ist die Punktabhängige Komponente (wie $\underline{v}_P$). Das Moment wird mit der folgenden Formel von oben berechnet: $\underline{M}_P = \underline{PA_1} \times \underline{F}_{A_1} + \underline{PA_2} \times \underline{F}_{A_2} + \dots$

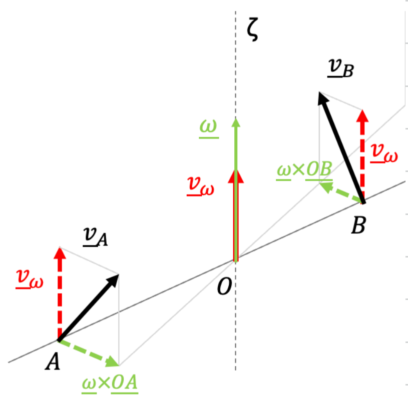
Hat man diese zwei Werte, kann man jedes Moment im Körper bestimmen:
$\underline{M}_A = \underline{M}_P + \underline{R} \times \underline{PA}$

Ein Lastzustand hat ebenfalls zwei Invarianten: $\underline{R}$ und $\underline{M}^{(R)}$. $\underline{M}^{(R)}$ ist dabei die Projektion vom Moment eines beliebigen Punktes auf den Einheitsvektor von $\underline{R}$ ($\underline{v}_\omega$ in der Kinematik).
$\underline{M}^{(R)}$ lässt sich berechnen mit $\underline{M}^{(R)} = (\underline{M}_P \cdot \underline{e}_R) \cdot \underline{e}_R$.

Als letztes bleibt noch die Hauptachse des Lastzustands. Sie ist die Wirkungslinie von $\underline{R}$, das Moment aller Punkte auf der Hauptachse ist gleich $\underline{M}^{(R)}$. Man findet sie auf ähnliche Art wie die Hauptachse eines Bewegungszustands.



Lastzustand



Bewegungszustand

• Leistung und Statische Äquivalenz

Die Leistung ist ein eher Abstrakter Wert. Sie beschreibt, wie stark eine Kraft den Betrag einer Geschwindigkeit ändert. Sie wird auf folgende Art berechnet:

$P = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A + \underline{F}_B \cdot \underline{v}_B + \dots$ Für Kräfte

$P = \underline{\omega} \cdot \underline{M}_A$ Für ein Moment

$P = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_B$ Für Zustand mit bekannter Kinemate und Dyname im Punkt B

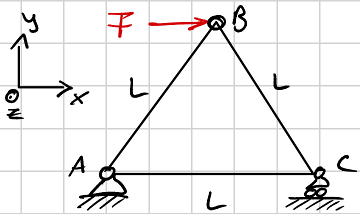
Zwei Kräftegruppen sind dann statisch Äquivalent, sobald ihre Leistungen bei jedem beliebigen Bewegungszustand gleich sind.
Am besten überprüft man das meistens, indem man die Dynamen beider Gruppe am selben Punkt berechnet, sind sie gleich, sind die Kräftegruppen Äquivalent.

• Kräfte- und Momentengleichgewicht

In Mechanik I betrachten wir hauptsächlich statische Lastzustände.
D.h. wir haben Kräftegruppen von denen die Summe aller Kräfte sowie die Summe aller Momente gleich null ist, wir sagen zu solchen Lastzuständen dass sie im Gleichgewicht sind. Aber achtung: Im Gleichgewicht zu sein, heisst nicht dass sich der Körper nicht Bewegen darf! Wenn wir die Formel $F = ma$ betrachten und für $F=0$ einsetzen, sehen wir dass die Beschleunigung $a=0$ sein muss. Also sind konstante Geschwindigkeiten erlaubt.

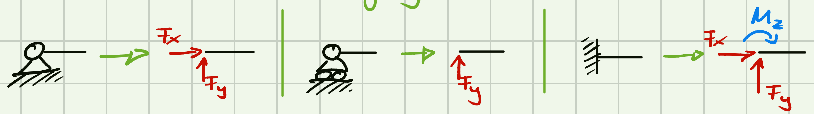
Die meisten Statik Aufgaben sind wieder Fachwerk Aufgaben, in denen man bestimmte Kräfte berechnen muss. Vor allem die Kräfte an Lagerungen sind oft gefragt. Solche Aufgaben kann man zum Beispiel folgendermassen Lösen:

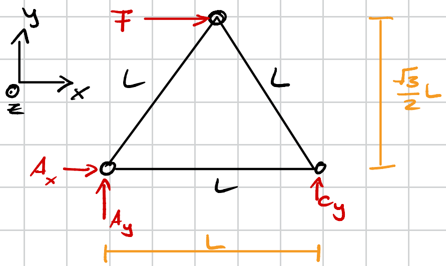
1. Man hat ein Fachwerk gegeben:



2. Man entfernt die Lager und zeichnet die Lagerkräfte ein

Ein Lager kann nur Kräfte in die Richtungen einführen, in denen er keine Bewegung erlaubt





in 3D: x, y, z

3. Man stellt das Kräftegleichgewicht in x und y Richtung ein. Sowie das Momentengleichgewicht in z-Richtung an einem beliebigen Punkt.

in 3D: x, y, z

$$\sum F_x = 0: \; A_x + F = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; A_y + C_y = 0$$

$$\sum M_z^A = 0: \; C_y L - F \frac{\sqrt{3}}{2} L = 0$$

Das Vorzeichen der Momente bestimmt man mit der Rechten-Hand-Regel.

Tipp für GGW in 3D:
Zeichne das Problem in der x-y, y-z und x-z Ebene und stelle die Bedingungen mit Hilfe dieser Projektionen auf. Z.B. stellt man die F_y, F_z, M_x Bedingungen am einfachsten in der y-z Ebene auf.

4. Nun hat man ein Gleichungssystem, dass man für die gesuchten Werte Lösen kann.

$$\sum F_x = 0: \Rightarrow A_x = -F$$

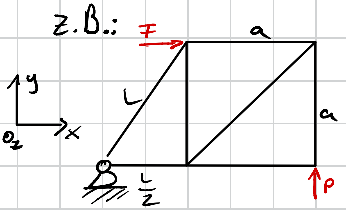
Negative Werte heissen einfach, dass man die Kraft in die falsche Richtung eingezeichnet hat

$$\sum M_z^A = 0: \Rightarrow C_y = \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

$$\sum F_y = 0: \Rightarrow A_y = -C_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

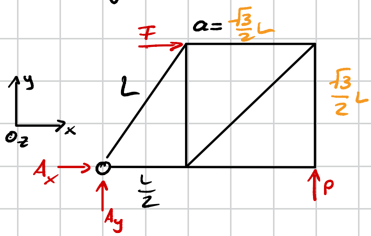
Eine andere häufig vorkommende Art von Aufgaben sind Fachwerke mit mehreren Kräften, von denen man den Betrag bestimmen muss, damit das System im Gleichgewicht bleibt:

z.B.:



Bestimme P in Abhängigkeit von F, sodass das System in Ruhe bleibt.

1. Lagerkräfte einführen



2. GGB (Gleichgewichtsbedingungen) aufstellen.

$$\sum M_z^A = 0: -F\frac{\sqrt{3}}{2}L + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)L = 0$$

Wenn man den Punkt für das Momenten ggw schlau wählt, kann man es sich ersparen, unnötige Werte ausrechnen zu müssen.

3. System Lösen

$$P = F\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2+1/2} = F\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$